Lycée Pierre D'Ailly

PCSI

# Chapitre 17 - Espaces Vectoriels de Dimension finie
# Chapitre 18 - Intégration

# Table des matières

# 17

# Espaces Vectoriels de Dimension finie

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n$ est un entier naturel non nul.

# 1. Dimension finie

## 1.1 Définition

**Définition 17.1.**

On dit que l'espace vectoriel $E$ est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Sinon, on dit que $E$ est de **dimension infinie**.

**Exemples**

1. $\mathbb{C}$ est de un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dimension finie car il est engendré par la famille
2. $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie car il est engendré par
3. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie car il est engendré par la famille
4. De manière générale, si $E = \text{Vect}(e_1, e_2, ..., e_p)$, alors $E$ est de dimension finie.
5. L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de dimension infinie puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(f_0, f_1, ...., f_n)$ est libre avec
$$f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$$

## 1.2 Existences de bases

**Lemme 17.1.**

Soit $(e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de $E$.
Si $e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, e_2, ..., e_n)$ alors la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est génératrice du sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1})$ :
$$\text{Vect}(e_1, e_2, ..., e_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1})$$

**Preuve**

A partir de maintenant, supposons $E \neq \{0_E\}$.

**Théorème 17.2** (Théorème de la base extraite)**.**

De toute famille génératrice de $E$, on peut extraire une base de $E$.

**Preuve**

**Corollaire 17.3** (Existence d'une base)**.**

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

**Preuve**

**Théorème 17.4** (Théorème de la base incomplète)**.**

Toute famille libre d'un espace vectoriel $E$ non réduit à $\{0_E\}$ de dimension finie peut être complétée en une base de $E$.

**Preuve**

### 1.3 Dimension d'un espace vectoriel

**Lemme 17.5.**

Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille génératrice de cardinal $n$ de $E$. Alors toute famille $(v_1, v_2, ..., v_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de $E$ est liée.

On en déduit :

**Corollaire 17.6.**

Si $\mathscr{L}$ est une famille libre de $E$ et $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de $E$ :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{G})$$

**Théorème 17.7.**

Soit $E$ un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ de dimension finie.
Alors toutes les bases de $E$ ont le même nombre d'éléments.

**Preuve**

Ceci nous permet de définir la dimension d'un espace vectoriel :

**Définition 17.2.**

Soit $E$ un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ de dimension finie.
On appelle **dimension** le cardinal de toute base de $E$, on le note $\dim E$.
Par convention $\dim(\{0_E\}) = 0$.

**Exemples**

— $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} =$
— $\dim \mathbb{K}^n =$
— $\dim \mathbb{K}_n[X] =$
— $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) =$
— On note $\mathscr{S}_1$ l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, du type $y' + ay = 0$ où $a$ est continue sur $I$. Alors $\dim \mathscr{S}_1 =$
— On note $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 2, du type $ay'' + by' + cy = 0$. Alors $\dim \mathscr{S}_2 =$

***remarques :***

— Comme le montre l'exemple $\mathbb{C}$, en cas de confusion possible, il faut préciser le corps sur lequel on considère l'espace vectoriel .
— Un espace vectoriel de dimension 1 est une droite vectorielle.
— Un espace vectoriel de dimension 2 est un plan vectoriel.

**Proposition 17.8.**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$, alors :

1. toute famille génératrice de $E$ admet au moins $n$ éléments.
2. toute famille libre de $E$ admet au plus $n$ éléments.

**Preuve**

On en déduit le théorème très utile suivant :

**Théorème 17.9** (Caractérisation des bases en dimension finie)**.**

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B}$ une famille d'éléments de $E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathscr{B}$ est une base de $E$.
2. $\mathscr{B}$ est libre et contient $n$ éléments.
3. $\mathscr{B}$ est génératrice et contient $n$ éléments.

**Preuve**

**Exemple 17.1.**

*Montrer que la famille suivante est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$ *:*

$$\mathscr{F} = (1, 1 + X, 1 + X + X^2, ..., 1 + X + ... + X^n)$$

- $\text{Card}(\mathscr{F}) = n + 1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X]$
- *Soit* $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1}$ *tel que :*

$$a_0 + a_1(1 + X) + a_2(1 + X + X^2) + ... + a_n(1 + X + ... + X^n) = 0$$

*alors en travaillant sur les degrés descendants :* $a_n = a_{n-1} = ... = a_0 = 0$

*Donc la famille est libre.*

*Par la caractérisation des bases,* $\mathscr{F}$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$

# 2. Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie

## 2.1 Définition

**Théorème 17.10.**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie.
Alors tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus $\dim F = \dim E \Leftrightarrow E = F$.

**Preuve**

**Exemple 17.2.**

*Ainsi pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.*

$$E = Vect((1,0,-1),(1,-1,1)) \qquad et \qquad F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y+z=0\}$$

– *Il est clair que $E \subset F$ (il suffit de montrer que les deux vecteurs vérifient l'équation).*
– *Puis $\dim E = 2$ car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre et $\dim F = 2$ car :*

$$(x,y,z) \in F \Leftrightarrow x = -2y - z$$

*donc 2 variables paramètres.*

*Ainsi $E = F$.*

**Exercice 17.1.** Dans $E = \mathbb{R}^4$, soit

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z+t=0\}$$

Donner une base et la dimension de $F$.

## 2.2 Dimension d'un produit cartésien

**Proposition 17.11.**

Soient $F$ et $G$ deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $F \times G$ est de dimension finie et

$$\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$$

Cette propriété se généralise au produit d'une famille finie d'espaces vectoriels par récurrence.

**Preuve**

## 2.3 Supplémentaires

**Proposition 17.12.**

Tout sous-espace vectoriel $F$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

**Preuve**

**Proposition 17.13.**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$. Alors :

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

**Preuve**

**Exemple** : Toute droite vectorielle $D$ admet au moins un supplémentaire et par ce qui précède, tout supplémentaire de $D$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. On dit alors que ce supplémentaire est un **hyperplan**.

Dans le cas où les sous-espaces vectoriels ne sont pas supplémentaires, la formule est différente :

**Proposition 17.14** (Formule de Grassmann)**.**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels quelconques de $E$ de dimension finie. Alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

**Preuve**

En particulier :

**Corollaire 17.15.**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels quelconques de $E$ de dimension finie. Alors

$$\dim(F+G) \leqslant \dim F + \dim G$$

**Théorème 17.16** (Caractérisation des supplémentaires en dimension finie)**.**

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E = F \oplus G$
2. $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$
3. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

**Preuve**

**Exemple 17.3.**

1. *Déterminer un supplémentaire dans* $\mathbb{R}^4$ *de*

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y = z+t = 0\}.$$

$$G = Vect((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))$$

*donc* $\dim G = 2$.
*On cherche donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 tel que* $G \cap G' = \{0\}$
*On choisit* $G' = Vect((1,1,0,0),(0,0,1,1))$
*On montre ensuite facilement que la famille est libre et génératrice.*

2. *De même pour*

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t = 0\}.$$

$$F = Vect((1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1))$$

*On cherche alors une droite vectorielle :* $D = \mathbb{R}(a,b,c,d)$ *telle que* $D \cap F = \{0\}$
*On peut montrer alors que* $\mathbb{R}(1,0,0,0)$ *convient.*

# 3. Rang d'une famille finie de vecteurs

**Définition 17.3.**

Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de $E$ (de dimension quelconque).
On appelle **rang de** $\mathscr{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{F}$, on la note $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$.
Ainsi :

$$\mathrm{rg}\,\mathscr{F} = \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}$$

**Exemple :** $\mathrm{rg}(1, X) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(1, X, 1 + X) =$

**Proposition 17.17** (Caractérisation des familles finies libres par le rang)**.**

Pour toute famille finie $\mathscr{F}$ de vecteurs de $E$, on a :

$$\mathrm{rg}\,\mathscr{F} \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{F})$$

et

$$\mathscr{F} \text{ est libre} \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,\mathscr{F} = \mathrm{Card}(\mathscr{F})$$

**Preuve**

# 18

# Intégration

Dans tout le chapitre, $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$.

# 1. Fonctions en escalier

## 1.1 Subdivision d'un segment

**Définition 18.1.**

On appelle **subdivision** du segment $[a, b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (a_i)_{I \in [\![0,n]\!]}$ telle que $a_0 = a$ et $a_n = b$, donc de sorte que :

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$$

**Exemple** : Une de celles les plus utilisées est : $\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)_{i \in [\![0,n]\!]}$, elle est de pas constant : $\frac{b-a}{n}$.

**Définition 18.2.**

Soient $\sigma$ et $\sigma'$ deux subdivisions de $[a, b]$.
On dit que $\sigma$ est **plus fine** que $\sigma'$ si tous les points de $\sigma'$ sont des points de $\sigma$.

**Exemple** : Donner un exemple de subdivision plus fine que celle de l'exemple précédent.

**Proposition 18.1.**

Soient $\sigma$ et $\sigma'$ deux subdivisions de $[a, b]$.
Alors il existe une subdivision de $[a, b]$ plus fine que $\sigma$ et $\sigma'$.

**Preuve**

## 1.2 Fonctions en escalier

**Définition 18.3.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que $f$ est **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de $f$ à $]a_i, a_{i+1}[$ est constante.
Dans ce cas, on dit que la subdivision est **adaptée** à $f$.

**Exemples**

—
— La fonction constante sur $[a, b]$ est en escalier sur $[a, b]$.
— La fonction partie entière est en escalier sur tout segment de $\mathbb{R}$.

**Notation** On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles en escalier sur $[a,b]$.

**Proposition 18.2.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et $\sigma$ une subdivision adaptée.
Alors toute subdivision de $[a,b]$ plus fine que $\sigma$ est adaptée à $f$.

**Preuve**

**Corollaire 18.3.**

$\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

**Preuve**

## 1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

**Proposition 18.4.**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\sigma$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à $f$.
Alors pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ , $\exists \lambda_i \in \mathbb{R},\ \forall x \in ]a_i, a_{i+1}[,\ f(x) = \lambda_i$.
On note alors $S_\sigma(f)$ la somme :

$$S_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i$$

Alors pour toute autre subdivision $\sigma'$ adaptée à $f$, $S_\sigma(f) = S_{\sigma'}(f)$.

**Preuve**

**Définition 18.4.**

La somme $S_\sigma(f)$ précédemment définie ne dépend alors que de $f$. On l'appelle **intégrale de $f$ sur** $[a,b]$ et on la note $\int_{[a,b]} f$.

***remarques :***

- Si $f$ est à valeurs réelles positives, l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ s'interprète alors géométriquement par la somme des aires des rectangles associés à la subdivision choisie.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_{[a,b]} \lambda = \lambda(b-a)$.
- Par définition, l'intégrale ne dépend pas des valeurs prises par $f$ aux points de la subdivision.
- Ainsi, si deux fonctions en escalier sont égales sauf en un nombre fini de points alors leurs intégrales sont égales.
- On en déduit que si $f$ est une fonction égale à $\lambda$ sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points alors $\int_{[a,b]} f = \lambda(b-a)$.

**Exemple 18.1.**

*Calculer l'intégrale de la partie entière sur* $\left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

$$\int_{[-\frac{5}{2},\frac{3}{2}]} f = -2 \times \left(-1 - \frac{-5}{2}\right) + (-1) \times (0-(-1)) + 0 \times (1-0) + 1 \times \left(\frac{3}{2} - 1\right) = -\frac{3}{2}$$

## 1.4 Propriétés de l'intégrale

**Proposition 18.5** (Inégalité triangulaire)**.**

Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. Alors

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

**Preuve**

**Proposition 18.6.**

Soit $(f, g) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1. **Linéarité**
$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$
2. **Positivité** Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.
3. **Croissance de l'intégrale** Si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

**Preuve**

**Proposition 18.7** (Relation de Chasles)**.**

Soient $c \in ]a,b[$ et $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$
Alors les restrictions de $f$ à $[a,c]$ et à $[c,b]$ sont en escalier et :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$

Ce que l'on écrit aussi, de manière abusive :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

**Preuve**

# 2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

## 2.1 Approximation

On souhaite alors étendre la notion d'intégrale à des fonctions continues sur $[a,b]$.
Pour cela, on approche les fonctions continues par des fonctions en escalier.

**Théorème 18.8.**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles.
Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, si la suite $(\varphi_n)$ vérifie cette propriété alors la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et la limite ne dépend pas du choix de $(\varphi_n)$.
On appelle alors **intégrale de** $f$ le nombre

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)$$

**Preuve** admise

***remarque :*** Le symbole $\int_{[a,b]} f$ n'a été défini que pour des fonctions en escalier avec $a < b$, mais on définit de manière générale, pour des fonctions **continues** sur $[a, b]$ :

— si $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$

— si $a > b$, alors $\displaystyle\int_a^b f = -\int_{[b,a]} f$

— si $a = b$, alors $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

**Définition 18.5** (Valeur moyenne)**.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On appelle **valeur moyenne** de $f$ le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$.

## 2.2 Propriétés de l'intégrale

**Proposition 18.9** (Inégalité triangulaire)**.**

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

**Preuve**

**Proposition 18.10.**

Soit $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

1. **Linéarité**
$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$
2. **Positivité** Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.
3. **Croissance de l'intégrale** Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

**Preuve**

**Exercice 18.1.** Soient $I$ un intervalle réel, $(a,b) \in I^2$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que la fonction $f$ est continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant M\,|b-a|$$

**Proposition 18.11** (Relation de Chasles)**.**

Soient $c \in ]a,b[$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$
Alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$$

Ce que l'on écrit aussi, de manière abusive :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

**Preuve**

## 2.3 Fonctions de signe constant

**Théorème 18.12.**

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ à valeurs positives.
Si $f$ n'est pas la fonction nulle, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.

**Preuve**

**Corollaire 18.13.**

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ à valeurs positives.
Si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f$ est la fonction nulle.

**Preuve**

**Exercice important - Inégalité de Cauchy-Schwarz**

1. Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\left(\int_{[a,b]} g^2\right)$$

2. Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $f$ et $g$ sont proportionnelles.

# 3. Approximations numériques

Bien que le théorème 18.8 nous assure que l'intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction continue existe, dans la pratique il est parfois compliqué de la déterminer. Nous en avons fait l'expérience par exemple dans le Chapitre 6 - Calcul de primitives et d'intégrales.

Ce théorème nous permet aussi d'affirmer que toute fonction continue sur $[a,b]$ peut être approchée par une suite de fonctions en escalier. Donnons ici deux exemples de suites.

## 3.1 Sommes de Riemann

**Définition 18.6.**

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **somme de Riemann d'ordre $n$ associée à $f$** la somme :

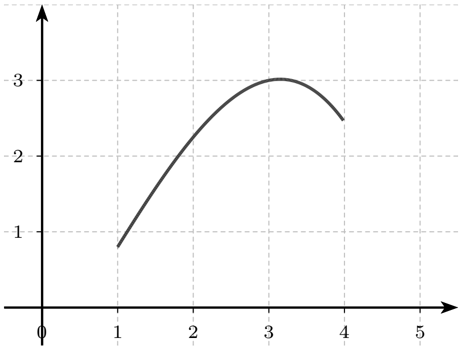
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

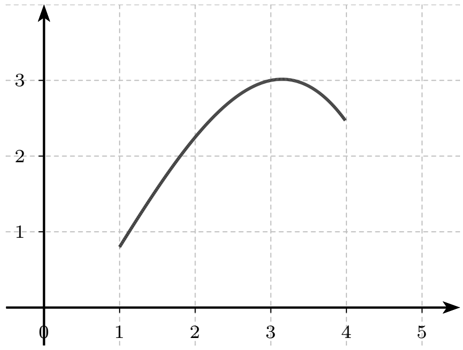
***remarques :***

— La somme $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ est l'intégrale d'une fonction en escalier $g$ sur $[a,b]$, plus précisément :

— On définit de même la somme $S'_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

Ces deux sommes permettent d'approcher par défaut et par excès l'intégrale de $f$ sur $[a,b]$.




Lorsque $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut, de plus, majorer l'erreur d'approximation.

**Proposition 18.14** (Sommes de Riemann dans le cas $\mathcal{C}^1$)**.**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - S_n(f)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

avec $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

En particulier

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

**Preuve**

***remarque :*** On peut écrire la même proposition avec la somme $S'_n$. De même, on peut écrire cette proposition pour des fonctions seulement continues. Mais la démonstration est hors programme.

**Théorème 18.15.**

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f$$

**Exemple 18.2.**

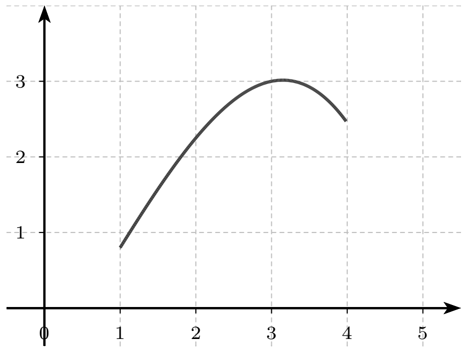
1. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$

2. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k}$

### 3.2 Méthode des trapèzes

La méthode précédente n'est pas optimale car elle donne une erreur d'ordre $\frac{1}{n}$, cela signifie que pour obtenir une approximation à $10^{-6}$ près, il faut faire $10^6$ calculs.

La méthode qui suit, appelée **méthode des trapèzes**, est meilleure car on utilise des polygones qui "épouse" mieux l'allure de la courbe.




On approche alors l'intégrale par la somme des aires des trapèzes :

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \qquad \text{où } a_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

On peut alors montrer (exercice) que

$$\left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - T_n(f) \right| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{où } K = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

## 4. Calcul intégral

Dans cette partie on complète le CHAPITRE 6 - CALCUL DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES.
On notera $I$ un intervalle réel d'intérieur non vide.

### 4.1 Primitive

**Théorème 18.16** (théorème fondamental de l'analyse)**.**

Soit $x_0 \in I$ et $f$ une fonction continue sur $I$ à valeurs réelles.
Alors l'application $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de $f$.
C'est l'unique primitive de $f$ s'annulant en $x_0$.

**Preuve**

**Corollaire 18.17.**

1. Soit $x_0 \in I$ et $f$ une fonction continue sur $I$ à valeurs réelles. La fonction $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $x \mapsto f(x)$.
2. Toute fonction continue sur un segment $I$ admet une primitive sur ce segment.

**Preuve**

**Corollaire 18.18.**

Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $F$ une primitive de $f$ sur $I$. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Preuve**

En particulier :

**Corollaire 18.19.**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Pour tout $(a,b) \in I^2$ :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$$

## 4.2 Intégration par parties

**Théorème 18.20.**

Soient $u, v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

***remarque :*** On rappelle que toutes les hypothèses doivent être vérifiées avant d'utiliser le théorème.

### 4.3 Changement de variable

**Théorème 18.21.**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$. Alors :

$$\forall (a,b) \in J^2,\ \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

On a alors fait le changement de variable $u = \varphi(t)$.

⚠ On n'oubliera pas de justifier que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle et on n'oubliera pas de changer les bornes de l'intégrale.

### 4.4 Parité, imparité, périodicité

**Proposition 18.22.**

Soient $a \in \mathbb{R}^*{}_+$ et $f \in \mathcal{C}([-a,a],\mathbb{R})$.
- Si $f$ est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f = 2\int_{-a}^{0}$.
- Si $f$ est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$.

**Preuve**

**Exemple 18.3.**

*Calculer* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \arctan(x) \sin^2 x dx$. $\cos$ *paire,* $\arctan$ *impaire et* $\sin^2$ *paire donc intégrale nulle*

**Proposition 18.23.**

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $f$ est $T$-périodique, alors

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \int_a^{a+T} f = \int_0^T f$$

**Preuve**

## 5. Formules de Taylor

Dans cette partie $I$ désigne un intervalle réel d'intérieur non vide et non réduit à un point.

**Définition 18.7.**

Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $f$ dérivable $n$ fois en $a$.
On appelle **polynôme de Taylor de $f$ en $a$ à l'ordre $n$** la fonction polynomiale :

$$T_{f,a,n} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Et on note $R_{f,a,n}$ le **reste**, c'est-à-dire $R_{f,a,n} = f - T_{f,a,n}$.

**Théorème 18.24** (Formule de Taylor avec reste intégral)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

**Preuve**

**Exemple 18.4.**

1. *Montrer que pour tout* $x > 0$, $\ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

2. *Montrer que, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, *la suite* $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

**Théorème 18.25** (Formule de Taylor-Young)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$. Alors $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en tout point $a$ de $I$ qui est :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{a}{o}((x-a)^n)$$

**Preuve**

***remarque :*** ⚠ L'hypothèse est plus forte pour la Formule de Taylor avec reste intégral que pour la formule de Taylor Young. La formule de Taylor nous permet de dire que, dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, le reste intégral tend plus vite vers 0 que $(x-a)^n$ ne tend vers 0.

**Proposition 18.26** (Primitivation des développements limités)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$. On suppose que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $a \in I$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \underset{a}{o}((x-a)^n)$$

Alors toute primitive $F$ de $f$ sur $I$ admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en $a$ :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \underset{a}{o}((x-a)^{n+1})$$

**Preuve**

**Théorème 18.27** (Inégalité de Taylor-Lagrange).

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Alors pour tout $(a, b) \in \mathring{I}^2$, $f^{(n+1)}$ est bornée par une constante $M_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ sur $[a, b]$ et :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

**Preuve**

**Exemple 18.5.**

*Pour $x \in \mathbb{R}_+$, déterminer la limite de la suite* $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

*La fonction* $\exp$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists M \in \mathbb{R}_+, \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

*or à $x$ fixé,* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ *(règle de d'Alembert)*

*et par l'exemple 18.4, la suite* $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, on en déduit*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

## 6. Extension aux fonctions à valeurs complexes

La définition de l'intégrale s'étend aux fonctions à valeurs complexes et plusieurs propriétés sont conservées telles que la linéarité, l'inégalité triangulaire... Les propriétés de positivité et de croissance ne sont pas conservées.

**Définition 18.8.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
On définit **l'intégrale de** $f$ par :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re} f + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im} f$$

***remarque :*** Cette définition est licite car nous avons vu au Chapitre 11 - Limites et continuité que $f$ est continue si, et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont, puis les parties réelle et imaginaire étant des fonctions réelles on se ramène au début de ce chapitre.

**Proposition 18.28.**

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

1. **Linéarité**
$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$
2. **Conjugué**
$$\int_{[a,b]} \overline{f} = \overline{\int_{[a,b]} f}$$
3. **Inégalité triangulaire**
$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

**Preuve**

***remarques :***

- On étend aussi la notion de fonctions en escalier aux fonctions à valeurs complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire ainsi que leur intégrale.
- Toute la partie **Calcul intégral** de ce chapitre est conservée et en particulier, les théorèmes d'intégration par parties et de changement de variable sont valables pour les fonctions à valeurs complexes.
- Toutes les formules de Taylor sont conservées sur $\mathbb{C}$.

Il nous reste alors à prouver le théorème vu au Chapitre 12 - Dérivabilité :

**Théorème 18.29** (Inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes)**.**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$.
S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant M$, alors :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \leqslant M\,|b-a|$$

**Preuve**

# TD17 - Espaces Vectoriels de dimension finie

**Exercice 1 -** On pose $f_1 : x \longmapsto x$ ; $f_2 : x \longmapsto x^2$ ; $f_3 : x \longmapsto x \ln x$ et $f_4 : x \longmapsto x^2 \ln x$.
On pose également $F = \left\{ af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \ ; \ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$

1. Montrer que $F$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Quelle est sa dimension ?

**Exercice 2 -** On considère les vecteurs de $\mathbb{K}^4$ définis par : $x = (1, -1, 1, 1)$ $y = (0, 1, 1, -1)$
et $u = (1, 0, 1, 0)$ $v = (1, -2, -1, 2)$ $w = (2, -1, 1, 1)$ $k = (1, 1, 2, -1)$ $\ell = (1, 1, 0, 0)$ $m = (0, 0, 1, 1)$

1. Montrer que $\mathscr{L} = (x, y)$ est libre et que $\mathscr{G} = (u, v, w, k, l, m)$ est génératrice.
2. Compléter $\mathscr{L}$ en une base de $\mathbb{K}^4$ en puisant dans $\mathscr{G}$.

**Exercice 3 -** Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(2) = 0\}$.

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel et en donner une famille génératrice.
2. Déterminer un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ engendré par un polynôme de degré $k$.

**Exercice 4 -** $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 5 -** Déterminer un supplémentaire de $\text{Vect}((X-1)^2, (X+1)^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

**Exercice 6 -** Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(-1) = P(0) = P(1) = 0\}$,
$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$.
Montrer que $F \oplus G = H$.

**EXERCICE 7** - Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de $E$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que la famille $(e_1, e_1 + e_2, ..., e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n)$ est une base de $E$.

**EXERCICE 8** - Pour les exemples suivants, déterminer une base et la dimension.

1. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = 0\}$
2. $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P(2) = 0\}$
3. $H = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n\}$
4. $K = \{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ y'' - 2y' + 5y = 0\}$.
5. $J = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

**EXERCICE 9** - Pour les exemples suivants, déterminer une base et un supplémentaire dans $E$.

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y - z = x - y = t = 0\}$, $E = \mathbb{R}^4$.
2. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z - t = x - 3y - 2z = 0\}$, $E = \mathbb{R}^4$.
3. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3,\ x + y + z = 0 \text{ et } x + iy - z = 0\}$, $E = \mathbb{C}^3$
4. $K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y + z - 2t = 0 \text{ et } x + z = 0\}$, $E = \mathbb{R}^4$

**EXERCICE 10** - Montrer que les polynômes $P_1 = X, P_2 = X - 1$ et $P_3 = (X - 1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de $P = 2X^2 - 5X + 6$ dans cette base.

**EXERCICE 11**

1. Montrer que $u = (1, -2, 3),\ v = (-2, 3, -1)$ et $w = (3, 2, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $(0, 0, 0)$, $(1, -2, 3)$ et $(4, -3, 7)$ dans cette base.

**EXERCICE 12** - Soit $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre $n$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre $n$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_(\mathbb{K})$.
2. Déterminer $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K}))$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$.
3. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

**EXERCICE 13** - Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (1, -1, 1),\ x_2 = (-1, 1, -1),\ x_3 = (0, 1, 1),\ x_4 = (1, 0, 2)$
2. $x_1 = (1, 1, 0, 1),\ x_2 = (1, -1, 1, 0),\ x_3 = (2, 0, 1, 1),\ x_4 = (0, -2, 1, -1)$
3. $x_1 = (0, 1, 0, 1),\ x_2 = (1, -1, 1, -1),\ x_3 = (1, -1, -1, 1),\ x_4 = (1, 1, 1, 1)$
4. $P_1 = X^2 + X - 3,\ P_2 = X^2 - X - 3,\ P_3 = 2X^2 - X - 6$.

# TD18 - Intégration

**Exercice 1** - Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.
On suppose de plus $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(1) \neq 0$, déterminer un équivalent quand $n$ tend vers $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$.

**Exercice 2** - On pose $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \end{array}\right.$

1. Calculer $f_0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)$.
2. Établir une relation de récurrence entre $f_n$ et $f_{n+1}$.
3. Montrer que $f_n$ admet une limite en $+\infty$. On la note $\ell_n$.
4. Montrer que $\ell_n = n!$.

**Exercice 3** - Déterminer un encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t+1}\mathrm{d}t$.

**Exercice 4** - On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$. Montrer, en majorant $I_n$, que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**EXERCICE 5** - Soit $f$ définie sur $[1,+\infty[$ par $f(t)=t\ln t$.

1. Étudier rapidement la fonction $f$.

   Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

2. Montrer que $\int_1^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_1^n f(t)\mathrm{d}t + n\ln n$
3. Calculer $\int_1^n f(t)\mathrm{d}t$
4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{4/n^2}$.

**EXERCICE 6** - Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = f(c)$$

**EXERCICE 7** - Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow f \text{ est de signe constant}$$

**EXERCICE 8** - Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$. Montrer que $f$ admet un point fixe.

**EXERCICE 9** - Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0$. On note $M$ et $m$ son maximum et minimum. Montrer que $\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant -mM$.

**EXERCICE 10** - Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \mathrm{d}x$.

1. Etablir une relation liant $I_n$ et $I_{n+1}$.
2. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}, 0<I_n<\frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ puis un équivalent de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
4. Soit $(u_n)$ une suite réelle définie par $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\mathrm{e}-(n+1)u_n$. On suppose $a\neq I_0$. Montrer, en étudiant $D_n=|u_n-I_n|$ que $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=+\infty$.

**Exercice 11** - On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x$

1. Justifier l'existence de $I_n$.
2. Calculer $I_n - I_{n-2}$ $(n \geqslant 2)$.
3. Calculer $I_0$ et $I_1$.
4. Exprimer $I_{2p}$ et $I_{2p+1}$.

**Exercice 12** - Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-k/n}}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^2n}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}(k^2+n^2)^{\frac{1}{n}}$
6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

**Exercice 13** - Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, en utilisant les sommes de Riemann.

**Exercice 14** - Soit $f : \left\{\begin{array}{ccc} {\mathbb{R}^*}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \end{array}\right.$.

1. Dresser le tableau de variations de $f$ avec ses limites.
2. Déterminer le signe de $x \mapsto f(x) - \ln x$.

**Exercice 15** - Soit $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \end{array}\right.$.

1. Montrer que $g$ est impaire.
2. Calculer sa dérivée.
3. Déterminer sa limite en $+\infty$.

**Exercice 16** - Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f$ est bien définie et étudier sa parité.
2. Justifier que $f$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de $f$.

**Exercice 17 -** Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $f$ est dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t)g(t)\mathrm{d}t$
2. Montrer que $f$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$
3. Résoudre cette équation différentielle.

**Exercice 18 -** Soit $\mathcal{C}^+([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs strictement positives. On pose pour $f \in \mathcal{C}^+([a,b])$ :

$$\varphi(f) = \left(\int_{[a,b]} f\right)\left(\int_{[a,b]} \frac{1}{f}\right)$$

Déterminer, si elle est définie, $\displaystyle\inf_{f \in \mathcal{C}^+([a,b])} \varphi(f)$.

**Exercice 19 -** Soit $f$ une fonction positive ou nulle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f''$ est bornée et on note $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \sqrt{2Mf(x)}$$

**Exercice 20 - Lemme de Riemann-Lebesgue.** Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$I_n = \int_a^b f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

Déterminer la limite de la suite $(I_n)$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t$.