Lycée Pierre D'Ailly

PCSI

Chapitre 19 - Applications Linéaires
Chapitre 20 - Matrice d'une application linéaire
Chapitre 21 - Dénombrement

Table des matières

19

Applications Linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, E, F et G sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .

1. Généralités

1.1 Définition et opérations

Définition 19.1.

On appelle **application linéaire** toute application $u : E \to F$ vérifiant la propriété :

$$\forall (x,y) \in E,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

Une application linéaire est aussi appelée **morphisme d'espace vectoriel** et on définit aussi parmi les applications linéaires les **endomorphismes** si $E = F$ c'est-à-dire $u : E \to E$

remarque : De manière équivalente, une application linéaire est une application qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ u(x+y) = u(x) + u(y) \text{ et } u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

Notations : On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples :

— Les fonctions linéaires vues au collège $\left(\text{du type } f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax \end{array} \right. \text{ avec } a \in \mathbb{R}\right)$ sont des applications linéaires du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. Ce sont de plus les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

— La dérivation est une application linéaire de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

Exemple 19.1.

1. *Montrer que l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+3y, x+y+z) \end{array} \right.$ *est linéaire.*

2. *Soit* $a \in \mathbb{K}$. *Montrer que l'application* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(a) \end{array} \right.$ *est linéaire.*

remarque : Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
On peut alors montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, ..., x_n) \in E^n$ et pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k)$$

c'est-à-dire l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Proposition 19.1.

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. $u(0_E) = 0_F$
2. $\forall x \in E,\ u(-x) = -u(x)$

Preuve

Proposition 19.2 (Structure de $\mathscr{L}(E,F)$)**.**

— $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
— $\mathscr{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

Preuve

Proposition 19.3 (Composée d'applications linéaires)**.**

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

$$v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$$

Preuve

Exercice 19.1. Bilinéarité de la composition Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$

1. Soient $(u_1, u_2) \in \mathscr{L}(E,F)^2, v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $v \circ (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 v \circ u_1 + \lambda_2 v \circ u_2$.
2. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F), (v_1, v_2) \in \mathscr{L}(F,G)^2$. Alors $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \circ u = \lambda_1 v_1 \circ u + \lambda_2 v_2 \circ u$.

1.2 Image et noyau d'une application linéaire

On rappelle la définition d'image directe et image réciproque, pour toute application (linéaire ou non) $f : E \to F$:

$$\forall A \subset E,\ f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A,\ f(x) = y\}$$
$$\forall B \subset F,\ f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Proposition 19.4.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E alors $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F alors $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

Définition 19.2.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. On appelle **noyau de** u le sous-ensemble de E des antécédents de 0_F par u. Il est noté Ker u :

$$\text{Ker } u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E,\ u(x) = 0_F\}$$

2. On appelle **image de** u le sous-ensemble de F des images par u. Il est noté $\operatorname{Im} u$:

$$\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x),\ x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E,\ y = u(x)\}$$

Exemple 19.2.

Soit u définie de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$ par $u(x,y,z) = (x+y+z, x-2y-z)$. Montrer que u est linéaire et déterminer son noyau.

linéarité laissée en exercice
Soit $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\ u$, alors :

$$u(x,y,z) = 0_{\mathbb{K}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -3y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3}z \\ y=-\frac{2}{3}z \end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Vect}((-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1))$

Proposition 19.5.

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. $\mathrm{Ker}\ u$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}\, u$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve

remarque : Cette proposition permet alors de montrer rapidement que des ensembles sont des sous-espaces vectoriels , s'ils peuvent s'écrire comme le noyau d'une application linéaire. Comme par exemple :

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-2z = y-3z+t = 0\}$$

Théorème 19.6 (Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité)**.**

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. u est injective si, et seulement si $\mathrm{Ker}\ u = \{0_E\}$.
2. u est surjective si, et seulement si $\mathrm{Im}\, u = F$.

Preuve

Exemple 19.3.

Montrer que l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$ *est injective.*

2. Bases et applications linéaires

2.1 Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Théorème 19.7.

Soit E un espace vectoriel admettant une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.
Soit $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une famille de vecteurs de F. Alors il **existe une unique** application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ u(e_i) = f_i$$

On dit que u est entièrement caractérisée par l'image d'une base.

Preuve

remarque : Ainsi pour définir une application linéaire, il suffit de donner les images des vecteurs de base. De même, pour montrer l'égalité de deux applications linéaires, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur une base.

Exemple
Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On considère l'unique application linéaire qui vérifie

$$u(e_1) = e_3, u(e_2) = -e_2 \qquad \text{et} \qquad u(e_3) = e_1$$

Déterminer l'expression de $u(x, y, z)$ pour tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{K}^3$.

Proposition 19.8.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors u est entièrement caractérisée par ses restrictions à E_1 et E_2 , c'est-à-dire qu'il suffit de connaître les restrictions de u à E_1 et E_2 pour la connaître entièrement.

Preuve

2.2 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Théorème 19.9.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.

1. u est injective si et seulement si $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est libre dans F .
2. u est surjective si et seulement si $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est génératrice de F.
3. u est bijective si et seulement si $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base de F .

Preuve

3. Isomorphismes

3.1 Groupe linéaire

Définition 19.3.

1. On appelle **isomorphisme** toute application linéaire bijective.
2. On appelle **automorphisme** tout endomorphisme bijectif.

Notation : On appelle **groupe linéaire** et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition 19.10.

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si u est un isomorphisme de E sur F alors u^{-1} est un isomorphisme de F sur E.
En particulier, si $u \in GL(E)$ alors $u^{-1} \in GL(E)$.

Preuve

Proposition 19.11.

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
Si u et v sont des isomorphismes alors $v \circ u$ est un isomorphisme de E sur G et :

$$(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$$

Preuve

remarque : En particulier, ceci montre que l'opération de composition est une loi de composition interne dans $GL(E)$.

Définition 19.4.

On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E sur F.

3.2 Isomorphismes et dimension finie

Proposition 19.12.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes si, et seulement si } \dim E = \dim F$$

Preuve

Corollaire 19.13.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Théorème 19.14 (Applications aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2)**.**

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On considère l'ensemble $\mathscr{S}$ des suites vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

1. $\mathscr{S}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.
2. On note $P = X^2 - aX - b$. Alors, selon les racines de P, on peut donner une base de $\mathscr{S}$:
   — Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
     (a) Si $P = (X - z_1)(X - z_2)$ avec $z_1 \neq z_2$ alors $\mathscr{S} = \text{Vect}((z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$
     (b) Si $P = (X - z_0)^2$ alors $\mathscr{S} = \text{Vect}((z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nz_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$
   — Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
     (a) Si $P = (X - r_1)(X - r_2)$ avec $r_1 \neq r_2$ alors $\mathscr{S} = \text{Vect}((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$
     (b) Si $P = (X - r_0)^2$ alors $\mathscr{S} = \text{Vect}((r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$
     (c) Si $P = (X - z)(X - \overline{z})$ avec $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, z = \rho e^{i\theta}$, alors $\mathscr{S} = \text{Vect}((\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}, (\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$

Preuve

Théorème 19.15 (Caractérisation des isomorphismes)**.**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est injective.
2. u est surjective.
3. u est bijective.
4. $\exists v \in \mathscr{L}(F, E),\ u \circ v = Id_F$.
5. $\exists w \in \mathscr{L}(F, E),\ w \circ u = Id_E$.

Preuve

En particulier :

Corollaire 19.16.

Si E est de dimension finie, alors pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$:

$$u \text{ injective } \Leftrightarrow u \text{ surjective } \Leftrightarrow u \text{ bijective}$$

⚠ Ces résultats sont en général faux en dimension infinie.

4. Endomorphismes remarquables

4.1 Identité et homothétie

Proposition 19.17.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $h : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E appelé **homothétie de rapport** λ.
Dans le cas où $\lambda = 1$, h est l'application **identité** notée Id_E.

Preuve laissée en exercice

Proposition 19.18.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E et son automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

Preuve

4.2 Projecteurs

Dans cette partie on suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est-à-dire $E = F \oplus G$.

Définition 19.5.

L'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array} \right.$ où $x = x_F + x_G$ est l'unique décomposition de x selon F et G, s'appelle **projection sur** F **parallèlement à** G. F s'appelle alors la **base** de p et G la **direction** de p.

Exemples

1. L'application $(x, y) \mapsto (x, 0)$ est la projection de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des abscisses.
   De même, l'application $(x, y) \mapsto (0, y)$ est la projection de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe des ordonnées. (on peut aussi faire l'analogie à $\mathbb{C}$)
2.

Proposition 19.19.

Si p est la projection sur F parallèlement à G, on a

1. Pour tout $x \in E$, la décomposition de x selon F et G est $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$
2. $p \in \mathscr{L}(E)$
3. $\operatorname{Ker} p = G$
4. $\operatorname{Im} p = F$ et $p(x) = x \Leftrightarrow x \in \operatorname{Im} p$

Preuve

Par conséquent, pour tout projecteur p, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Définition 19.6.

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que p est un **projecteur** s'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E tels que p soit la projection de E sur F parallèlement à G.

Proposition 19.20.

Un endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur si, et seulement si $p \circ p = p$. Et dans ce cas $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Preuve

4.3 Symétries

Définition 19.7.

On appelle **symétrie par rapport à F parallèlement à G** l'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x = x_F + x_G & \mapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$
On appelle encore F **base** de la symétrie et G **direction** de la symétrie.

remarque : Avec les notations précédentes, si on désigne par p la projection sur F parallèlement à G, on a $x_F = p(x)$ et $x_G = x - p(x)$ et donc :

$$s(x) = x_F - x_G = p(x) - (x - p(x)) = 2p(x) - x$$

d'où l'égalité $\boxed{s = 2p - Id_E}$.
En particulier on obtient que : $s \in \mathscr{L}(E)$.

Proposition 19.21.

Toute symétrie est involutive, c'est-à-dire $s \circ s = Id_E$.

Preuve

Proposition 19.22.

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$.
Si $s \circ s = Id_E$, alors s est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel Ker $(s - Id_E)$ parallèlement au sous-espace vectoriel Ker $(s + Id_E)$.

Preuve

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la conjugaison est une symétrie. En effet :

2. La transposition des matrices est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet :

5. Rang d'une application linéaire

5.1 Rang d'une application linéaire et composition

Définition 19.8.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle **rang de l'application linéaire** u,et on note $\operatorname{rg} u$, la dimension de l'image de u :

$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im} u)$$

Lorsque $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, on dit alors que u est **de rang fini.**

Exemple 19.4.

Déterminer le rang de l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$

Alors $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Ainsi $P' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$

Donc $\operatorname{Im} u = \mathbb{K}_{n-1}[X]$, *d'où* $\operatorname{rg} u = n$.

Proposition 19.23.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim(E)$.
2. Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim(F)$.
3. Si F est de dimension finie, alors l'application u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(u) = \dim(F)$.
4. $\operatorname{rg}(u) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(u) = \{0_F\} \Leftrightarrow u = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$.

Preuve

Proposition 19.24.

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. On suppose u et v de rang fini. Alors $v \circ u$ est de rang fini et :

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$$

Preuve

Proposition 19.25 (Invariance par composition par un isomorphisme)**.**

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. Si u est un isomorphisme et si v est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
2. Si v est un isomorphisme et si u est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Preuve

5.2 Théorème du rang

Théorème 19.26 (Forme géométrique du théorème du rang)**.**

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

L'application $u_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & \operatorname{Im} u \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de G sur $\operatorname{Im} u$.

Preuve

Corollaire 19.27 (Théorème du rang).

Si E est de dimension finie et si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ alors u est de rang fini et :

$$\dim E = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u$$

Preuve

Exemple Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est une droite vectorielle.

5.3 Forme linéaire et hyperplan

On rappelle qu'un **hyperplan** H d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Définition 19.9.

On appelle **forme linéaire** toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple L'application $Tr : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet :

Proposition 19.28.

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et H et D deux sous-espaces vectoriels de E.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$

Preuve

Proposition 19.29.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de E.
Alors H est un hyperplan de E si, et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Preuve

Conséquence : Soient H un hyperplan de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle telle que $H = \text{Ker } \varphi$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $x \in E$ de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ dans $\mathscr{B}$.

Alors $x \in H$ si et seulement si $\varphi(x) = 0$, ce qui donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, où on a posé $a_i = \varphi(e_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Exemples

— Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + z = 0$ est

— Le sous-espace vectoriel $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P''(0) - P(0) = 0\}$ est

6. Équations linéaires

Définition 19.10.

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $a \in F$. L'équation $u(x) = a$ est une **équation linéaire**.

remarque : Tout système d'équations linéaires peut se mettre sous cette forme.
Exemple : Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ z + t = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$$

c'est résoudre le système

Théorème 19.30 (Solutions d'une équation linéaire homogène)**.**

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. L'ensemble des solutions du système linéaire $u(x) = 0_F$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

Théorème 19.31 (Solutions d'une équation linéaire)**.**

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $y_0 \in F$.
- Si $y_0 \notin \operatorname{Im} u$ alors l'ensemble des solutions de $u(x) = y_0$ est vide.
- Si $y_0 \in \operatorname{Im} u$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que l'ensemble des solutions de $u(x) = y_0$ est $x_0 + \operatorname{Ker} u$ c'est-à-dire $\{x_0 + x, x \in \operatorname{Ker} u\}$

Preuve

remarque : En particulier, cette propriété a été énoncée et démontrée pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2, ainsi que pour les systèmes linéaires et les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

20

Matrice d'une application linéaire

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

On considère ici :
— un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E possédant une base $e = (e_1, e_2, ..., e_p)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$
— un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F possédant une base $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

1. Matrices et applications linéaires

1.1 Représentation matricielle d'une application linéaire

Définition 20.1.

Soit $x \in E$. Alors x admet une unique décomposition dans la base e : $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$.
On définit alors la matrice de x dans la base e comme la matrice colonne de ses coordonnées :

$$\mathrm{Mat}_e x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

Définition 20.2.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **matrice de u relativement aux bases e et f**, notée $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$, la matrice de la famille $(u(e_j))_{j \in [\![1,p]\!]}$ dans la base f.
En effet, comme f est une base de F, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, il existe une unique décomposition de $u(e_j)$ dans la base f :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

Ainsi l'application peut être représentée par une matrice à n lignes et p colonnes :

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

remarque :
— Lorsque $E = F$, on prend en général $f = e$ et dons ce cas on note $\mathrm{Mat}_e(u)$ la matrice de u relativement aux bases e et e.
— $\mathrm{Mat}_{e,f} u$ est aussi la matrice dans la base f de la famille $u(e)$.

Exemple 20.1.

On considère $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{K}^3$ et u l'application linéaire définie par $u(e_1) = e_3$, $u(e_2) = -e_2$ et $u(e_3) = e_1$.
Donner la matrice de u dans la base e.

$$Mat_e(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

On en déduit alors le théorème :

Théorème 20.1.

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Pour tout vecteur $x \in E$:

$$\mathrm{Mat}_f u(x) = \mathrm{Mat}_{e,f} u \times \mathrm{Mat}_e x$$

Preuve

Proposition 20.2 (Matrice d'une combinaison linéaire)**.**

Pour toutes applications linéaires $(u,v) \in \mathscr{L}(E,F)^2$, pour tous éléments de $\mathbb{K}$ (λ,μ) :

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathrm{Mat}_{e,f} u + \mu \mathrm{Mat}_{e,f} v$$

Preuve

Exemple 20.2.

1. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *est la matrice de la rotation vectorielle d'angle θ du plan*

2. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice d'une homothétie de rapport λ de l'espace est la matrice :* λI_n

Théorème 20.3.

L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{e,f} u \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Preuve

remarque : Ce théorème nous permet, en dimension finie, de traiter tout problème portant sur des applications linéaires à l'aide de matrices et réciproquement.

Corollaire 20.4.

Si E et F sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et :

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

Preuve

1.2 Opérations et matrices

Proposition 20.5 (Matrice d'une composée)**.**

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies de bases respectives e, f et g.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{f,g} v \times \mathrm{Mat}_{e,f} u$$

En particulier, si $E = F = G$, $\mathrm{Mat}_e(v \circ u) = \mathrm{Mat}_e v \times \mathrm{Mat}_e u$

Preuve

remarque : on fera bien attention au sens de la multiplication.

Proposition 20.6.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose $\dim E = \dim F = n$.

$$u \text{ est bijective si, et seulement si la matrice } \mathrm{Mat}_{e,f} u \text{ est inversible}$$

Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{f,e}(u^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{e,f} u)^{-1}$

En particulier :

$$u \in \mathscr{L}(E) \text{ est bijective si, et seulement si la matrice } \mathrm{Mat}_{e} u \text{ est inversible}$$

Preuve

1.3 Matrice de passage d'une base à une autre

Définition 20.3.

Soient e et e' deux bases du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **matrice de passage de** e **à** e', notée $P_e^{e'}$, la matrice $\text{Mat}_e e'$ de e' dans la base e. Elle s'obtient grâce aux décompositions des vecteurs de la base e' dans la base e.

Exemple 20.3.

La matrice de passage de la base $e = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $e' = (e_3, -e_2, e_1)$ de $\mathbb{K}^3$ est :

$$P_e^{e'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

Proposition 20.7.

1. $P_e^{e'} = \text{Mat}_e e' = \text{Mat}_{e',e} Id_E$
2. $P_e^e = I_p$
3. $P_e^{e'} \in GL_p(\mathbb{K})$ et $\left(P_e^{e'}\right)^{-1} = P_{e'}^e$.

Preuve

1.4 Changement de base

Proposition 20.8 (Changement de base et coordonnées d'un vecteur)**.**

Soient e et e' deux bases de E.
Soit $x \in E$. On note $X = \text{Mat}_e x$ et $X' = \text{Mat}_{e'} x$ alors :

$$X = P_e^{e'} X'$$

Preuve

Exemple 20.4.

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On note e la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $e' = ((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1))$ une autre base de E. On note x le vecteur de coordonnées $(2,3,-1,-3)$ dans la base e'. Déterminer ses coordonnées dans la base e.

$$X' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad et \quad P_e^{e'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 & e'_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Proposition 20.9 (Changement de base et application linéaire)**.**

Soient e et e' deux bases de E, f et f' deux bases de F.
On note $P = P_e^{e'}$ et $Q = P_f^{f'}$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on pose $A = \mathrm{Mat}_{e,f} u$ et $A' = \mathrm{Mat}_{e',f'} u$.
Alors :

$$A' = Q^{-1}AP$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Mat}_{e',f'}(u) = P_{f'}^{f} \mathrm{Mat}_{e,f}(u)\ P_e^{e'}$$

Preuve

remarque : (Hors programme) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **équivalentes** s'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$.

— On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— Par la proposition précédente, deux matrices représentant la même application linéaire dans des bases différentes sont équivalentes.

— La réciproque est vraie : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représentant $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$. La matrice $B = QAP$ représente l'application u dans une autre base.

Proposition 20.10 (Cas des endomorphismes)**.**

Soient e et e' deux bases de E et $u \in \mathscr{L}(E)$.
On pose $P = P_e^{e'}$ et $A = \text{Mat}_e u$ et $A' = \text{Mat}_{e'} u$. Alors :

$$A' = P^{-1}AP$$

Preuve : cas particulier du précédent résultat

remarque : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

— On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— Par la proposition précédente, deux matrices représentant le même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables.
— La réciproque est vraie

Exemple 20.5.

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On appelle e la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $e' = ((1,0,1),(2,1,0),(0,3,1))$ une autre base de E. On considère l'application linéaire u définie par $u((x,y,z)) = (x+3y, -y+2z, -z)$. Déterminer les matrices représentant u dans la base e et dans la base e'.

2. Noyau et image d'une matrice

Définition 20.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose $e = (e_1, ..., e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $f = (f_1, ..., f_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
On appelle **application linéaire canoniquement associée à la matrice A** l'application $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $A = \text{Mat}_{e,f} u$.
Ainsi : $\forall j \in [\![1,p]\!]\,,\ u(e_j) = a_{1,j}f_1 + a_{2,j}f_2 + ... + a_{n,j}f_n$

Exemple Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 20.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- On appelle **noyau de la matrice** A, noté $\operatorname{Ker} A$, le noyau de l'application linéaire canoniquement associé à A.
- On appelle **image de la matrice** A, noté $\operatorname{Im} A$, l'image de l'application linéaire canoniquement associé à A.

remarque :
- $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ et $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ qui vérifient $AX = 0$, ce sont donc les solutions d'un système linéaire homogène. Ainsi les lignes de A fournissent un système d'équations du noyau de A.
- L'image de A est engendrée par les vecteurs colonnes de A.

Exemple 20.6.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. *Déterminer* $\operatorname{Ker} A$ *et* $\operatorname{Im} A$.

3. Rang d'une matrice

3.1 Définition

Définition 20.6.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang de la matrice** A, noté $\operatorname{rg} A$, le rang de la famille des vecteurs colonnes de A. Ainsi en notant $C_1, c_2, ..., C_p$ les p colonnes de A, on a :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, C_2, ..., C_p) = \dim \operatorname{Vect}(C_1, C_2, ..., C_p)$$

Exemple 20.7.

1. $\operatorname{rg} A = 0 \Leftrightarrow A = O_n$
2. *La matrice Attila ("envahie par les Uns") est de rang 1 car tous les vecteurs colonnes de cette matrice sont égaux et non nuls.*
3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. *Déterminer le rang de la matrice* $A^T A$.

Proposition 20.11.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} \operatorname{Mat}_{e,f} u$$

Preuve

3.2 Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 20.12 (Théorème du rang version matricielle)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\dim \operatorname{Ker}\ A + \operatorname{rg} A = p$$

Preuve

Théorème 20.13 (Caractérisation des matrices inversibles)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A \in GL_n(\mathbb{K})$
2. $\operatorname{Ker}\ A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$
3. $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$
4. $\operatorname{rg} A = n$
5. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n$
6. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ BA = I_n$

Preuve

Exemple 20.8.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *Soit $X \in Ker\ A$, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 3y - 4z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5y - z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_{3,1}$$

donc $A \in GL_3(\mathbb{R})$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *non car $\operatorname{rg} B \leqslant 2$ (2 colonnes linéairement dépendantes)*

3.3 Propriétés du rang

Proposition 20.14.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Alors

$$\operatorname{rg}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$$

Preuve

Proposition 20.15 (Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible)**.**

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$. Alors :

$$\operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg} A \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(AQ) = \operatorname{rg} A$$

Preuve

Corollaire 20.16.

1. Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice conservent l'image.
2. Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice conservent le noyau.
3. Les opérations élémentaires conservent le rang.

Preuve

3.4 Rang de la transposée

Théorème 20.17.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^T)$$

Preuve admis

On obtient alors, grâce à la transposition le théorème suivant :

Corollaire 20.18.

Le rang d'une matrice A égal :
- au rang de la famille des vecteurs colonnes
- au rang de la famille des vecteurs lignes
- au rang de toute application linéaire qu'elle représente

Corollaire 20.19.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors
$$\operatorname{rg} A \leqslant \min(n,p)$$

3.5 Systèmes linéaires

Cette partie est la traduction matricielle de la partie Équations linéaires du chapitre 19 - APPLICATIONS LINÉAIRES

On considère un système linéaire dont la forme matricielle est $AX = B$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est l'inconnue.

Définition 20.7.

- Si $B = O_{n,1}$ alors le système est **homogène** et dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\operatorname{Ker} A$.
- On appelle **rang du système** le rang de la matrice A.
- Le système est **compatible** s'il admet au moins une solution c'est-à-dire si $B \in \operatorname{Im} A$

Proposition 20.20.

On suppose $\operatorname{rg} A = r$ et le système compatible. Alors l'ensemble solution du système $AX = B$ est de la forme $\{X_0 + X, X \in \operatorname{Ker} A\}$ où X_0 est solution particulière.

De plus, si $B = O_{n,1}$, alors l'espace solution est l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} A$, il est donc de dimension $p - r$.

Preuve

Théorème 20.21.

Supposons $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Le système $AX = B$ admet alors une unique solution : $X = A^{-1}B$. Dans ce cas, on dit que le système est **de Cramer.**

Preuve déjà faite au chapitre 13 - CALCUL MATRICIEL, c'était d'ailleurs la base d'une des méthodes d'inversion de matrice

21

Dénombrement

1. Ensembles finis

1.1 Définition du cardinal

Définition 21.1.

Soit E un ensemble.
On dit que E est un **ensemble fini** s'il existe un entier non nul n tel que E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$.
Dans ce cas, n est unique et est appelé **cardinal** de E, noté $\text{Card}(E)$, $|E|$ ou $\#E$.
Un ensemble **infini** est un ensemble qui n'est pas fini.
Par convention, l'ensemble vide est fini de cardinal 0.

remarques :

— Un ensemble de cardinal n a alors n éléments, on peut donc indexer ses éléments par l'ensemble $[\![1,n]\!]$: $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
— L'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal 0.
— Un ensemble à 1 élément est appelé **singleton**.

Exemple : Pour $n \in \mathbb{N}^*, \text{Card}([\![1,n]\!]) =$. Pour $m, n \in \mathbb{Z}, m \leqslant n,\ \text{Card}([\![m,n]\!]) =$

Proposition 21.1.

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Soit F un ensemble qui peut être mis en bijection avec E.
Alors F est fini de cardinal n.

Preuve

remarque : On en déduit que si E est un ensemble infini, alors tout ensemble F qui peut être mis en bijection avec E est infini.

1.2 Opérations sur les cardinaux

Proposition 21.2 (Cardinal de parties)**.**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$.

1. Pour tout $a \in E,\ \text{Card}(E \backslash \{a\}) = n - 1$
2. Soit A un sous ensemble de E, alors A est fini et $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$.
   De plus , $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) \Leftrightarrow A = E$.

Preuve

remarque : On en déduit alors pour montrer l'égalité de deux ensembles **finis**, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des cardinaux.

Exercice 21.1. Montrer que les parties finies de $\mathbb{N}$ sont exactement les parties majorées.

Proposition 21.3 (Réunion disjointe d'ensembles finis)**.**

Soient E et F deux ensembles finis **disjoints**. Alors $E \cup F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$$

Preuve

Cette propriété s'étend à une famille de sous ensembles disjoints :

Corollaire 21.4.

Soient $E_1, E_2, ..., E_p$ des ensembles finis deux à deux disjoints, alors $\bigcup\limits_{k=1}^{p} A_k$ est fini et :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(A_k)$$

Preuve : par récurrence, grâce à la propriété précédente.

Corollaire 21.5.

Soit A un sous ensemble d'un ensemble E fini. Alors :

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$$

Preuve

Proposition 21.6 (Réunion d'ensembles finis)**.**

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$$

Preuve

Proposition 21.7 (Cardinal du produit cartésien).

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$$

Preuve

Exemple : Soit $E = \{0, 1\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$.

Cette propriété se généralise à un produit cartésien fini d'ensembles finis :

Corollaire 21.8.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $E_1, E_2, ..., E_p$ p ensembles finis. Alors $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times ... \times \mathrm{Card}(E_p)$$

En particulier si E est un ensemble fini $\mathrm{Card}(E^p) = (\mathrm{Card}(E))^p$

Preuve : par récurrence en utilisant la propriété précédente

1.3 Applications entre ensembles finis

Proposition 21.9.

Soient E et F deux ensembles finis non vides et $f : E \to F$.

1. Si f est bijective, alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$
2. Si f est injective, alors $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$
3. Si f est surjective, alors $\mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$

Preuve

Conséquence : Une application d'un ensemble fini dans un autre dont le cardinal est strictement inférieur au premier, ne peut pas être injective : il existe donc nécessairement deux éléments qui ont la même image. C'est ce que l'on appelle familièrement **principe des tiroirs** :

Si on range p chaussettes dans n tiroirs et que $n < p$, il existe au moins deux chaussettes qui sont dans le même tiroir.

Théorème 21.10.

Soient E et F deux ensembles finis non vides, de même cardinal et $f : E \to F$. On a alors les équivalences :

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Preuve

2. Dénombrement

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments d'un ensemble, c'est-à-dire déterminer son cardinal. En pratique pour dénombrer un ensemble, on montre souvent qu'il a le même nombre d'éléments qu'un ensemble plus simple dont on connaît le cardinal.

2.1 Listes

Définition 21.2.

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p**-liste** (ou p**-uplet**) de E un élément de la forme $(x_1, x_2, ..., x_p)$ où $x_1, x_2, ..., x_p$ sont des éléments de E.

remarque : Attention l'ordre est important. Par exemple si $E = \{1, 2, 3\}$, $(1, 2) \neq (2, 1)$. Par contre, il peut y avoir des répétitions ($(1, 1) \in E^2$).

Théorème 21.11.

Soit E un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes (ou p-uplets) de E est égal à n^p .

Preuve

Exemple : Combien de mots de p lettres peut -on former avec un alphabet de n lettres ?

Proposition 21.12.

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs p et n non nuls. Alors l'ensemble F^E des applications de E dans F est un ensemble fini et :

$$\text{Card}(F^E) = n^p = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$$

Preuve

Proposition 21.13 (Nombre de parties de E)**.**

Si E est un ensemble de cardinal n, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ a pour cardinal 2^n.

Preuve

2.2 Arrangements

Définition 21.3.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble. On appelle **p-arrangement** d'éléments de E, toute p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

remarque : Un p-arrangement est alors un élément de E^p dans lequel l'ordre des éléments compte mais dans lequel il n'y a pas de répétitions.

Si le cardinal de E est strictement inférieur à p, il ne peut pas y avoir de p-arrangements.

Théorème 21.14 (Nombre de p-arrangements)**.**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. Le nombre de p-arrangements d'éléments de E est

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Preuve

remarque : Vous verrez peut-être la notation A_n^p pour désigner le nombre de p-arrangements d'un ensemble à n éléments, cette notation signifie de plus que $A_n^p = 0$ si $p > n$.

Exemple 21.1.

- *Le nombre de possibilités de tirer 5 boules distinctes numérotées de 1 à 40 est :* $\frac{40!}{35!} = 78\,960\,960$
- *Le nombre possible de tiercés dans l'ordre dans une course à 20 partants est :* $\frac{20!}{17!} = 6\,840$

Théorème 21.15.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant n$. Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$

Preuve

Corollaire 21.16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de bijections d'un ensemble E de cardinal n dans un ensemble F de même cardinal est $n!$.

Corollaire 21.17.

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de bijections de E dans E (appelées aussi **permutations**) est $n!$.

2.3 Combinaisons

Définition 21.4.

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$. On appelle p-**combinaison** de E toute partie de E à p éléments.

remarque :
- Contrairement aux p-listes, l'ordre ne compte pas ($\{0,1\} = \{1,0\}$) et il n'y a pas de répétitions donc il y a moins de combinaisons que de listes et de p-arrangements.
- Si $p = 0$, la seule partie à 0 élément est $\emptyset$.
- Si $p = n$, la seule partie à n éléments est E.
- Si $p > n$, il n'y a pas de parties à plus de n éléments (strictement) dans un ensemble à n éléments

Théorème 21.18 (Nombre de p-combinaisons)**.**

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Le nombre de parties à p éléments de E est

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Preuve

On rappelle les formules suivantes, qu'on ne redémontre pas.

Théorème 21.19.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Pour tout $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
2. **Formule de Pascal** : Pour tout $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$
3. **Formule du binôme de Newton** : Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemple 21.2.

On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Combien y a-t-il de tirages possibles ? $\binom{32}{8} = 10\ 518\ 300$

Combien y a-t-il de tirages contenant deux carrés ? $\binom{8}{2} = 28$ *car il y a 8 carrés possibles dans le jeu.*

Exemple 21.3.

Dans une classe de 30 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte). Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

TD19 - Applications Linéaires

Exercice 1 - Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que :
$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$$
2. Comparer $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im} g$.

Exercice 2 - Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leur noyau et leur image.

1. $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P - XP' \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 2x) \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - XP' - P(0) \end{array} \right.$
4. $f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$

Exercice 3 - Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X.P \end{array} \right.$ et $v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

1. Montrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$
2. Déterminer $v \circ u - u \circ v$.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\, v \circ u^n - u^n \circ v = n.u^{n-1}$.

Exercice 4 - Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P + P' + \cdots + P^{(n)} \end{array}$

1. Montrer que u et v sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Déterminer $u \circ v$ et $v \circ u$
3. Soit $Q(X) = 2X^4 - 4X^3 + 3X^2 + X - 6$. Déterminer $u^{-1}(Q)$

EXERCICE 5 - Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P+P' \end{array} \right.$. Montrer que φ est linéaire. Est-elle bijective ?

EXERCICE 6 - Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f+f' \end{array} \right.$. L'application est-elle injective ? surjective ?

EXERCICE 7 - Montrer que l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, 2z, y+z) \end{array} \right.$ est un automorphisme et déterminer sa bijection réciproque.

EXERCICE 8 - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ fois}} = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $g = Id_E - f$.
Montrer que g est bijective et donner son inverse.

EXERCICE 9 - Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ définie par $f(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - e_3)$, $\quad f(e_2) = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 - e_3)$, $\quad f(e_3) = \frac{1}{3}(-e_1 - e_2 + 2e_3)$.
Montrer que f est une projection et préciser $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

EXERCICE 10 - On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}(X^2 + X, X^3 + 1)$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer le projeté de $X^5 - X^3 + 1$ sur F parallèlement à G.

EXERCICE 11 - Soit $G = \operatorname{Vect}((X+1)^2)$ et $F = \operatorname{Vect}(X^2 + 2, 1)$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner l'image de $A = 2X^2 + 3X + 1$ par la projection p sur F parallèlement à G.
3. Donner l'image de A par la symétrie s d'axe F parallèlement à G.

EXERCICE 12 - Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}(X)$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer l'image par la projection p sur F parallèlement à G de $X^2 - 3X + 1$ et $X^k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 13 - Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x,y,z,z) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est un projecteur.
2. Déterminer son noyau et son image.
3. Donner l'image de $(1,2,3,4)$ par la symétrie d'axe $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ (f)$.

EXERCICE 14 - Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. Supposons dorénavant que $p+q$ est un projecteur, montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont en somme directe.
3. Montrer ensuite que $p+q$ est la projection de E sur $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ (p) \cap \mathrm{Ker}\ (q)$.

EXERCICE 15 - Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}\ (f) + \mathrm{Im}(f)$.

EXERCICE 16 - Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$.

1. Établir que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ et que $\mathrm{Im}(-f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer ensuite que l'on a l'encadrement : $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

EXERCICE 17 - Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. En appliquant la formule du rang à la restriction de v à $\mathrm{Im}(u)$, montrer que :
$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u) - \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\ v)$$
2. En déduire que : $\mathrm{rg}(v \circ u) \geqslant \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(u) - \dim F$.
3. Montrer que : $\dim \mathrm{Ker}\ (v \circ u) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\ (v) + \dim \mathrm{Ker}\ (u)$.

EXERCICE 18 - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\mathrm{Ker}\ u \oplus F = E$.
Montrer que $\dim u(F) = \dim F$.

EXERCICE 19 - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 4\,\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}\ (f + 2\,\mathrm{id}_E)$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\ (f - 2\,\mathrm{id}_E) = E$.

Exercice 20 - Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit f un endomorphisme nilpotent de E, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$

1. f peut-il être bijectif ?
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ et $\operatorname{rg} f \leqslant n-1$.
3. Soit q le plus petit entier non nul tel que $f^q = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   (a) Montrer que $\forall k \geqslant q \; f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   (b) Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^{q-1}(x_0) \neq 0_E$.
   (c) Montrer que $\left(x_0, f(x_0), ..., f^{q-1}(x_0)\right)$ est libre.
   (d) En déduire que $q \leqslant n$ puis que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 21 - Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.
On suppose que $f^3 + af^2 + f = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}\ (f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

TD20 - Matrice d'une application linéaire

Exercice 1 - Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Déterminer la matrice A de $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $3e_1 + e_2 - e_3 \in \text{Ker } f,\ f(e_1) = 2e_1 + e_3$ et $f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$.

Exercice 2 - Déterminer la matrice de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, x - z) \end{array} \right.$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 - Déterminer la matrice $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3)) \end{array} \right.$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 - On considère les sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants $F = \text{Vect}((1, 0, -1))$ et $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$. On note p la projection vectorielle sur E parallèlement à F, q la projection vectorielle sur F parallèlement à E et s la symétrie vectorielle par rapport à E parallèlement à F.

1. Écrire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire la matrice de q et de s dans la base canonique.
3. Donner l'image des vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(1, 1, 1)$ par p et s.

Exercice 5 - Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (X + 1)P'(X - 1) - P(X + 2) \end{array} \right.$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (X - 1, -X^2 + 4X + 1, 1)$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = (X - 1, -X^2 + 4X + 1, X^2 - 2X)$.

Exercice 6 - On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner une expression de l'application f canoniquement associée à A.
2. Donner une expression de $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} g$ où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Donner une expression de $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},e} h$ où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique $\mathbb{R}_2[X]$ et e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 -Soit M_a la matrice de $\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+a) \end{array} \right.$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
Ecrire M_a et calculer son inverse.

Exercice 8

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ représentée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ représentée par la matrice A dans la base $C = ((X-1)^2, (X+1)^2, X^2-1)$. Déterminer $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$.

Exercice 9 - Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à A.
Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 10 - Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.
On pose $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,-1,0)$ et $f_3 = (1,0,1)$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 11 - Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
2. Montrer que ces deux espaces sont supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de f dans une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette somme directe.

EXERCICE 12 - Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{f,f'} u$ avec $f = ((X-1)^2, (X+1)^2, X^2-1)$ et $f' = ((1,2,3),(1,2,0),(1,0,0))$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$.
2. Calculer l'image de $3X^2 - 2X - 1$ par u.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Soit $\mathscr{B} = (X^2-1, 4, 2X^2+2X+4)$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},f'} u$.

EXERCICE 13 - Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Supposons $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ soit une famille libre.
2. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :
   (a) $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$
   (b) Il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE 14 - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $e = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

1. On pose $f_1 = e_1 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2$ et $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E et déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

EXERCICE 15 - Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note u son endomorphisme canoniquement associé.

1. Déterminer les réels λ tels que Ker $(u - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{(0,0,0)\}$.
2. Déterminer une base de chacun des noyaux non réduits à l'élément neutre.
3. Montrer que Ker $(u - Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus$ Ker $(u - 4Id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.
4. En déduire qu'il existe une matrice Q que l'on précisera, telle que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice 16 - On considère

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{1}{3}(x-2y-6z, -x+2y-3z, -x-y) \end{array} \right.$$

1. Justifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. Montrer que u est une symétrie.
3. En donner les éléments caractéristiques.

Exercice 17 - On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que la famille :
$$\mathscr{B} = ((X-1)^3, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2, (X+1)^3)$$
est une base de E.
2. Déterminer la matrice de passage M de la base canonique de E à $\mathscr{B}$.
3. Quel est son inverse ?
4. Retrouver ce résultat en utilisant l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ qui transforme la base canonique en $\mathscr{B}$.

Exercice 18 - Montrer que ϕ définie par $\phi(P)(X) = \frac{1}{2}(P(X) + P(1-X))$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
Calculer $\phi \circ \phi$ et caractériser les éléments caractéristiques de cette transformation.

Exercice 19 - Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques, et calculer le rang desdites applications linéaires.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 2x+y) \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y-z) \end{array} \right.$
3. $\mathrm{Tr} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(M) \end{array} \right.$
4. $t : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^T \end{array} \right.$

Exercice 20 - Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ muni de sa base canonique notée e et $F = \mathbb{R}_2[X]$.
Montrer que $(1, X+1, X^2+1)$ est une base de F notée $\mathscr{B}$.

A $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} a_k X^k$, on associe $f(P) = a_0 X^2 + 7a_2 X + a_4$.

Donner la matrice de f dans les bases e et $\mathscr{B}$. Déterminer le rang de f, son image et son noyau.

EXERCICE 21 - On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$.

1. Vérifier que $f \in \mathscr{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer Ker (f) et en donner une base et la dimension.
3. f est-il surjectif ?
4. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et en donner une base et la dimension.
5. Ecrire la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
6. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est semblable à $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

TD21 - Dénombrement

Exercice 1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

1. $A = \{(i, j) \in [\![0, n]\!]^2, i < j\}$
2. $B = \{(i, j) \in [\![0, n]\!]^2, i > j\}$
3. $C = \{(i, j) \in [\![0, n]\!]^2, i \leqslant j\}$
4. $D = \{(i, j, k) \in [\![0, n]\!]^3, i < j < k\}$

Exercice 2 Dans un lycée de 1200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument et 453 ni font ni sport, ni musique. Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens.

Exercice 3 Une urne contenant 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules 1 à 5 sont blanches, les boules 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
   (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 4 - On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un as ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un as et au moins un roi ?

EXERCICE 5

1. Combien le mot ROMAIN possède-t-il d'anagrammes ?
2. Combien le mot CHIMIE possède-t-il d'anagrammes ?
3. Combien le mot KAYAK possède-t-il d'anagrammes ?
4. Combien le mot ELEVE possède-t-il d'anagrammes ?

EXERCICE 6 - Un couple décide d'organiser un repas avec $2n$ convives (eux inclus) répartis en n couples. On suppose qu'il y a n hommes et n femmes. Combien de possibilités de plan de table a-t-on :

1. au total ?
2. sans séparer les couples ?
3. en alternant les sexes ?
4. avec les deux derniers critères ?

EXERCICE 7

1. Combien un entier de la forme $p_1p_2...p_r$, avec les p_i des premiers distincts possède-t-il de diviseurs ?
2. Combien un entier de la forme $p_1^{m_1}p_2^{m_2}...p_r^{m_r}$, avec les p_i des premiers distincts et les m_i des entiers naturels non nuls, possède-t-il de diviseurs ?

EXERCICE 8 Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 3^p 5^q$ et que le produit de ses diviseurs vaut 45^{42}.
Déterminer n.

EXERCICE 9 - Soit E un ensemble de n élèves avec $n \in \mathbb{N}^*$. On décide de former des groupes de travail.

1. Combien de partitions possibles de la classe en deux groupes non vides ?
2. On suppose $n = 2p$, combien de partitions possibles de la classe en binômes ?
3. On suppose $n = pq$, combien de partitions possibles de la classe en p groupes de q élèves ?

EXERCICE 10 - Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ A \subset B\}$.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer le cardinal de F_k où $F_k = \{A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ A \subset B$ et $\text{Card}(B) = k\}$.
2. En déduire le cardinal de F
3. Retrouver ce résultat en calculant le cardinal de F d'une autre manière.

Exercice 11 - On s'intéresse aux applications $f : [\![1, 12]\!] \to [\![1, 12]\!]$.

1. Combien y-a-t-il d'applications de la sorte ?
2. Combien y-a-t-il de bijections de la sorte ?
3. Combien y-a-t-il d'applications de la sorte vérifiant la propriété : Si n est pair, alors $f(n)$ est pair ?
4. Combien y-a-t-il de bijections de la sorte vérifiant la propriété : Si n est pair, alors $f(n)$ est pair ?
5. Combien y-a-t-il d'applications de la sorte vérifiant la propriété : Si n est divisible par 3, alors $f(n)$ est divisible par 3 ?
6. Combien y-a-t-il de bijections de la sorte vérifiant la propriété : Si n est divisible par 3, alors $f(n)$ est divisible par 3 ?

Exercice 12 Pour tout ensemble E fini, de cardinal $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre d'involutions de E, c'est-à-dire d'applications f de E dans E telles que $f \circ f = \mathrm{id}_E$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n$

Exercice 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de listes d'entiers naturels non nuls dont la somme est n.

1. Calculer a_1, a_2 et a_3.
2. Conjecturer la formule donnant a_n et la démontrer.

Exercice 14 - Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer :

$$\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X) \quad \text{et} \quad \sum_{X, Y \subset E} \mathrm{Card}(X \cap Y)$$

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'un dénombrement, montrer :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$