*Calculatrice interdite. Durée : 4h.*

# Concernant la partie texte des devoirs

**T1** Laisser une marge suffisante (environ 4 cm s'il n'y en a pas déjà une).

**T2** Soigner la présentation et l'écriture. Aérer suffisamment.

**T3** Mettre en valeur les réponses, $\boxed{\text{en encadrant les résultats}}$. Souligner les résultats intermédiaires pour montrer les étapes de votre raisonnement.

**T4** L'utilisation d'abréviations dans une copie est fortement déconseillée (cf. rapports de concours).

**T5** Respecter et rappeler la numérotation de l'énoncé, et lorsqu'un résultat établi dans une question antérieure est utilisé, en citer précisément le numéro.

**T6** Mettre en évidence les différentes parties du sujet et laisser un espace suffisant entre chaque question.

---

**Exercice 1 - Questions de cours**

1. Énoncer le théorème de la formule de Taylor-Young.
2. Donner au moins deux méthodes pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel.
3. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

---

**Exercice 2** - *Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*

1. Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $E$ ? On justifiera la réponse.
   (a) L'ensemble des suites réelles monotones.
   (b) L'ensemble des suites réelles bornées.
   (c) $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_0 > 0\}$
2. (a) Justifier que l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

   On considère $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = f(1) = f'(0) = 0\}$ et $G$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus 2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
3. On considère les polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ suivants : $P_1 = X^4 + X^3$, $P_2 = X^4 + X^2$ et $P_3 = 2X^4 - 3X^3 + X^2$.
   (a) La famille $(P_1, P_2, P_3)$ est-elle libre ou liée ?
   (b) On pose $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$. Justifier que $F$ est un sous-espace vectoriel et en donner une base.
   (c) Montrer que $X^2 \in F$.
   (d) On pose $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ 1 \text{ est racine multiple de } P\}$. Montrer que $G$ est un espace vectoriel, déterminer une base de $G$.
   (e) $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires de $\mathbb{R}_4[X]$ ?

**Problème**

**Préliminaires : étude de** $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \end{array} \right.$ **.**

1. Étudier $f$ (régularité, variations, limites) et tracer l'allure de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

2. On pose $h : \left| \begin{array}{ccc} ]-1,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1+x}} \end{array} \right.$ . Justifier rapidement que $h$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > -1, \quad h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{(2n)!}{n!(1+x)^{\frac{1}{2}+n}}$$

3. Justifier l'existence d'une suite $(\alpha_n)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n)$$

   Expliciter $\alpha_n$ en fonction de $n$.

4. Donner le développement limité d'ordre 8 de $f$ en 0.

**Étude de** $(a_n)$ **suite définie par** $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$

5. Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite convergente ?

**Intégrales de Wallis et équivalent de** $a_n$**.**

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t.$$

7. Montrer que la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ :

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

9. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$I_{2n} = \frac{1}{(2n+1)a_n}, \quad \text{et :} \quad I_{2n-1} = \frac{\pi}{2} a_n.$$

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

    En déduire que :

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{2n+1} \leqslant a_n^2 \leqslant \frac{1}{n\pi}$$

11. En déduire un équivalent simple de $a_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, puis que :

$$I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

**Étude de** $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

12. Montrer que $F$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
13. Donner le sens de variations de $F$ sur $\mathbb{R}$.
14. Montrer que $F$ est impaire.
15. Montrer que $\forall x \geqslant 1, \quad F(x) - F(1) \leqslant 1 - \frac{1}{x}$.
16. En déduire en énonçant avec soin le théorème utilisé que $F$ admet une limite réelle en $+\infty$. Dans la suite, on note $\alpha$ cette limite.
17. Donner le développement limité de $F$ en 0 à l'ordre 9. On énoncera le théorème utilisé.
18. Donner une équation de la tangente $T$ à la courbe représentative $\mathscr{C}_F$ de $F$ au voisinage du point d'abscisse 0 et préciser la position de $\mathscr{C}_F$ par rapport à $T$ au voisinage de ce point.
19. Montrer que $\forall x > 0, \quad F(x) - F(1) = F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)$.
20. En déduire que $\alpha = 2F(1)$.
21. Dresser le tableau de variation de $F$, donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_F$ au point d'abscisse 1 et tracer finalement $\mathscr{C}_F$ en tenant compte des différents points de l'étude précédente.