Exercice 1 - Questions de cours

1. **Formule de Taylor Young**. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit f de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors f admet un développement limité d'ordre n en tout point a de I donné par

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k)$$

2. **Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E**, on peut
   - Montrer que $F + G = E$, et $F \cap G = \{0_E\}$.
   - ou bien, raisonner par analyse synthèse pour montrer que pour tout vecteur x de E, il existe un unique vecteur x_F dans F et un unique vecteur x_G dans G tels que $x = x_F + x_G$.
   - Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie, on peut aussi
     - Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
     - Ou encore montrer que $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
   - Dernière idée : montrer que la réunion d'une base de F et d'une base de G forme une base de E.

3. **Théorème fondamental de l'analyse** : Soit f fonction continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$, avec f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. f possède des primitives sur I, et pour tout $a \in I$, la fonction $F : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est la primitive de f nulle en a.

Exercice 2

1. Considérons dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

   (a) les suites (u_n) et (v_n) définies par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{3}{2} \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 1, v_1 = \frac{1}{4} \\ \forall n \geqslant 2, \quad v_n = 0 \end{array} \right.$. La suite u est croissante, la suite v est décroissante, mais $u + v$ n'est ni croissante ni décroissante puisque

$$u_0 + v_0 \leqslant u_1 + v_1 \qquad \text{mais} \qquad u_1 + v_1 \geqslant u_2 + v_2$$

   Donc l'ensemble des suites monotones n'est pas stable par combinaison linéaire et donc ne forme pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   $\boxed{\text{L'ensemble des suites monotones ne forme pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

   (b) Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des suites réelles bornées.
   - $\mathscr{B} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   - La suite nulle u est bornée puisque pour tout entier n, $|u_n| = 0 \leqslant 0$.
   - Soient $u, v \in \mathscr{B}^2$ et α, β deux réels. Notons M un réel tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$$

     Et M' un réel tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leqslant M'$$

     Alors pour $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire, $|\alpha u_n + \beta v_n| \leqslant |\alpha||u_n| + |\beta||v_n| \leqslant |\alpha|M + |\beta|M'$. Donc la suite $\alpha u + \beta v$ est bornée par $|\alpha|M + |\beta|M'$. En particulier, $\alpha u + \beta v \in \mathscr{B}$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est stable par combinaison linéaire.

   Par caractérisation des sous-espaces vectoriels , on en déduit que

   $\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{B} \text{ des suites réelles bornées est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$

   (c) La suite nulle n'est pas élément de $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}},\ u_0 > 0\}$. Par conséquent,

   $\boxed{F \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$

2. Dans l'ensemble $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

(a) Utilisons de nouveau la caractérisation des sous-espaces vectoriels .

- $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^\mathbb{R}$ et $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence.
- La fonction nulle est dérivable et sa dérivée est la fonction nulle, encore continue, donc la fonction nulle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.

Ainsi, $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \text{ a une structure d'espace vectoriel sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Soit $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\ f(1) = f(0) = f'(0) = 0\}$.

- $F \subset \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ par définition de F.
- Soit θ la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. θ est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\theta(1) = \theta(0) = \theta'(0) = 0$. Donc $\theta \in F$.
- Soient $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a déjà rappelé que $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par linéarité de l'évaluation

  $$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\lambda f + g)(1) = \lambda f(1) + g(1) = 0$$

  Puis par linéarité de la dérivation, $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$ et en particulier, de nouveau par linéarité de l'évaluation

  $$(\lambda f + g)'(0) = \lambda f'(0) + g'(0) = 0$$

  Finalement, $\lambda f + g \in F$. F est donc stable par combinaison linéaire.

On a ainsi démontré que

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^1(\mathbb{R}).}$$

Soit G l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus 2.

- Toute fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $G \subset \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
- La fonction nulle est la fonction polynomiale $x \mapsto 0x^2 + 0x + 0$, donc la fonction nulle est dans G.
- Soit $(f, g) \in G^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Considérons (a_0, a_1, a_2) et (b_0, b_1, b_2) triplets de réels tels que

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{et} \qquad g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

  Alors

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda a_2 + \mu b_2)x^2 + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + (\lambda a_0 + \mu b_0)$$

  Ce qui montre que $\lambda f + \mu g \in G$. Ainsi, G est stable par combinaison linéaire.

D'où par caractérisation des sous-espaces vectoriels ,

$$\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^1(\mathbb{R}).}$$

Autre méthode plus efficace. Notons $f_0 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right.$, $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ et $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors $G = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$, donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

(c) Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

- **Analyse**. Supposons l'existence de $f \in F$ et $g \in G$ telles que $h = f + g$. Alors il existe trois réels a, b, c tels que

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = ax^2 + bx + c$$

  Puis $h(0) = f(0) + g(0) = 0 + c$, donc $c = h(0)$ et $h(1) = 0 + a + b + c$, donc $a + b = h(1) - h(0)$. Par linéarité de la dérivation $h' = f' + g'$ et en particulier par linéarité de l'évaluation, $h'(0) = 0 + b$, donc $b = h'(0)$.
  On en déduit

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = (h(1) - h(0) - h'(0))x^2 + h'(0)x + h(0)$$

  Et donc

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = h(x) - \big((h(1) - h(0) - h'(0))x^2 + h'(0)x + h(0)\big)$$

- **Synthèse.** Soient $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x) - \big((h(1) - h(0) - h'(0))x^2 + h'(0)x + h(0)\big) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (h(1) - h(0) - h'(0))x^2 + h'(0)x + h(0) \end{array} \right.$. Alors par règles usuelles, f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et g est polynomiale de degré au plus 2. De plus,

$$f(0) = h(0) - h(0) = 0, \quad f(1) = h(1) - (h(1) - h(0) - h'(0) + h'(0) + h(0)) = 0$$

Et aussi

$$f'(0) = h'(0) - h'(0) = 0$$

Donc $f \in F$. Enfin, $f = g + h$.

Par analyse synthèse, on a prouvé

$$\forall h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}), \quad \exists!(f, g) \in F \times G, \quad h = f + g$$

Et donc

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{C}^1(\mathbb{R}).}$$

3. Dans $\mathbb{R}_4[X]$.

(a) Soient a, b, c trois réels tels que $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$, alors

$$(a + b + 2c)X^4 + (a - 3c)X^3 + (b + c)X^2 = 0$$

Donc par unicité des coefficients d'un polynôme, $\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a - 3c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$. Ce système se transforme en $\begin{cases} a = 3c \\ b = -c \\ 3c - c + 2c = 0 \end{cases}$. Donc la seule solution est $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Ainsi la seule combinaison linéaire nulle de P_1, P_2 et P_3 est la combinaison linéaire triviale. Ce qui montre que

$$\boxed{(P_1, P_2, P_3) \text{ est libre dans } \mathbb{R}_4[X].}$$

(b) Par définition de $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$, la famille (P_1, P_2, P_3) est génératrice de F. Mais d'après a) c'est une famille libre, donc

$$\boxed{(P_1, P_2, P_3) \text{ est une base de } F.}$$

Remarque. On en déduit $\dim F = 3$.
De plus, $F \subset \mathrm{Vect}(X^2, X^3, X^4)$, et (X^2, X^3, X^4) est échelonnée en degré donc libre.
Par suite, $\dim \mathrm{Vect}(X^2, X^3, X^4) = 3$. Et donc par inclusion et égalité des dimensions, $F = \mathrm{Vect}(X^2, X^3, X^4)$, ce qui montre que

$$\boxed{(X^2, X^3, X^4) \text{ est aussi une base de } F.}$$

(c) On résout cette fois le système $aP_1 + bP_2 + cP_3 = X^2$ d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On trouve pour unique solution $(a, b, c) = \left(\frac{-3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{-1}{4}\right)$. Donc X^2 est combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3 ie

$$\boxed{X^2 \in F}$$

Remarque : Si on a justifié que (X^2, X^3, X^4) est une base de F, alors il n'y a rien à montrer et on peut affirmer directement $X^2 \in F$.

(d) Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ 1 \text{ est racine multiple de } P\}$. Alors par caractérisation d'une racine multiple, $P \in G$ si, et seulement si $(x-1)^2 | P$ et $\deg(P) \leqslant 3$. Donc par raison de degré, $P \in G$ si, et seulement si il existe deux réels a et b tels que $P = (aX + b)(X - 1)^2$. Ou encore $P \in G$ si, et seulement si P est combinaison linéaire des deux polynômes $Q_1 = X(X - 1)^2$ et $Q_2 = (X - 1)^2$. Ainsi,

$$\boxed{G = \mathrm{Vect}(Q_1, Q_2)}$$

On sait qu'un tel ensemble a une structure d'espace vectoriel, donc

$$\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_3[X].}$$

(e) On remarque déjà que $\dim F + \dim G = 3 + 2 = 5 = \dim \mathbb{R}_4[X]$.
Ensuite, soit $P \in F \cap G$. Alors on a vu que F a pour base (X^2, X^3, X^4) et G a pour base (Q_1, Q_2). Donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$P = aX^2 + bX^3 + cX^4$$

et il existe $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$P = a'(X-1)^2 + b'X(X-1)^2 = b'X^3 + (a' - 2b')X^2 + (-2a' + b')X - a'$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit $a' = 0$ et $-2a' + b' = 0$, donc $a' = b' = 0$, puis $P = 0_{\mathbb{R}_4[X]}$. Ainsi, $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_4[X]}\}$.
Par caractérisation des supplémentaires en dimension finie, on en déduit

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_4[X].}$$

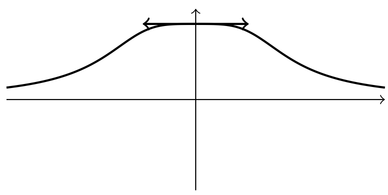
Problème

Ce sujet est écrit à partir de E3A PC 2011 et CCINP PSI 2022.

Préliminaires

1. f est paire, strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; en effet, la fonction $u \mapsto u^{\frac{-1}{2}}$ est strictement décroissante et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto 1 + x^4$ est paire, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1, +\infty[\subset]0, +\infty[$. Donc par composition, f est paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, f a pour limite 0 en $+\infty$, et le graphe de f présente une tangente horizontale en 0 (comme toute fonction paire). Enfin, $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, donc la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est asymptote en $\pm\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $h : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ comme composée de $x \mapsto \frac{-1}{2}\ln(1+x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et de la fonction exponentielle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Démontrons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$:« $\forall x > -1, \quad h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{4^n}\frac{(2n)!}{n!(1+x)^{\frac{1}{2}+n}}$ ».

- **Initialisation.** Pour $k = 0$, $h^{(0)} = h$, et pour $x > -1$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{(-1)^0}{4^0}\frac{(2\times 0)!}{0!(1+x)^{\frac{1}{2}+0}}$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons pour tout $x > -1$, $h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{(2n)!}{n!(1+x)^{\frac{1}{2}+n}}$, alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1, +\infty[, \quad h^{(n+1)}(x) &= \frac{(-1)^n}{4^n}\left(-\frac{1}{2} - n\right)\frac{(2n)!}{n!(1+x)^{\frac{1}{2}+n+1}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{4^n \times 2} \frac{(2n+1)(2n+2)}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{n!(1+x)^{\frac{1}{2}+n+1}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(1+x)^{\frac{1}{2}+n+1}}
\end{aligned}$$

- **Conclusion.** Par principe de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > -1, \quad h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{(2n)!}{n!(1+x)^{\frac{1}{2}+n}}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, on peut lui appliquer la formule de Taylor Young à l'ordre n en 0, ce qui donne

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

En posant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k = \frac{h^{(k)}(0)}{k!}$$

On définit ainsi une suite (α_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n)$$

De plus, par unicité des coefficients du développement limité,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n &= \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{(2n)!}{n!^2}
\end{aligned}$$

Et on en conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{4^n}}$$

4. Pour $x \in]-1, +\infty[$, $f(x) = h\left(x^4\right)$. Donc on utilise le développement limité d'ordre 2 de h au voisinage de 0 pour obtenir le développement limité de f à l'ordre 8 en 0, ce qui donne

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8)}$$

Étude de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

5. Déjà, pour tout entier n, $a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} > 0$, ensuite sachant $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

donc la suite $\boxed{(a_n) \text{ est une suite strictement décroissante de réels strictement positifs.}}$

6. (a_n) étant une suite décroissante de réels minorée par 0, $\boxed{\text{c'est une suite convergente de limite } \ell \in [0, a_0].}$

Intégrales de Wallis et équivalent de a_n.

7. Soit $m \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale

$$I_{m+1} - I_m = \int_0^1 (1-t)^{\frac{m}{2}}(\sqrt{1-t}-1)\,\mathrm{d}t$$

Et de plus,

$$\forall t \in [0,1], \quad (1-t)^{\frac{m}{2}}(\sqrt{1-t}-1) \leqslant 0$$

Donc par croissance de l'intégrale

$$I_{m+1} - I_m \leqslant 0$$

On en déduit

$$\boxed{(I_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante.}}$$

8. Soit $m \in \mathbb{N}$, toujours par linéarité de l'intégrale

$$I_{m+2} = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = I_m - \int_0^1 \left(t^2(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\right)\mathrm{d}t$$

On intègre alors par parties avec les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, d'expressions respectives $u(t) = \frac{-1}{m+2}(1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}$ et $v(t) = t$, ce qui donne

$$I_{m+2} = I_m - \left[\frac{-1}{m+2}(1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}t\right]_0^1 - \frac{1}{m+2}\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}\,\mathrm{d}t$$

Et donc

$$I_{m+2} = I_m - \frac{1}{m+2}I_{m+2}$$

On en déduit aussitôt

$$\boxed{I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3}I_m}$$

9. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\mathscr{P}_n : I_{2n} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}, \qquad \text{et :} \quad \mathscr{Q}_n : I_{2n-1} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times 2 \times \frac{\pi}{4}.$$

- **Initialisation.** $I_2 = \int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et d'autre part, $a_1 = \frac{2!}{4.1!^2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3a_1} = \frac{2}{3}$$

  Donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

  Deux méthodes pour déterminer I_1
  - Calcul par changement de variable : $t = \sin(u)$, changement $\mathscr{C}^1$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$ qui conduit à $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$.
  - Méthode géométrique : I_1 est l'intégrale du quart de disque trigonométrique contenu dans le quart de plan $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Donc $I_1 = \frac{\pi}{4}$.

  D'autre part,

$$\frac{\pi}{2}a_1 = \frac{\pi}{4}$$

  Donc $\mathscr{Q}_1$ est aussi vérifié.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on suppose que $\mathscr{P}_n$ est vérifié et que $\mathscr{Q}_n$ l'est également. Alors d'une part, d'après Q.9.

$$\begin{aligned}
I_{2n+2} &= \frac{2n+2}{2n+3}I_{2n} \text{ donc par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(2n+2)2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)(2n+1)!} \text{ on mulitplie par } \frac{2n+2}{2n+2} \\
&= \frac{(2n+2)^2 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}
\end{aligned}$$

Si bien que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifié.

De la même façon, par Q.9. on a aussi

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n-1} \\ &\overset{\text{par HR}}{=} \frac{(2n+1)(2n)!2\pi}{(2n+2)(2^n n!)^2 4} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!2\pi}{(2n+2)^2(2^n n!)^2 4} \\ &= \frac{(2n+2)!2\pi}{(2^{n+1}((n+1)!)^2} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{Q}_{n+1}$ est vérifié.

- **Conclusion.** Par principe de récurrence, on en déduit que

$$\forall n \in_N^\star, \quad I_{2n} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} = \frac{1}{(2n+1)a_n} \qquad \text{et} \qquad I_{2n-1} = \frac{(2n)!2\pi}{(2^n n!)^2 4} = \frac{\pi}{2} a_n$$

Ainsi, on a démontré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad I_{2n} = \frac{1}{(2n+1)a_n} \qquad \text{et} \qquad I_{2n-1} = \frac{\pi}{2} a_n}$$

10. Les expressions obtenues en Q.9. montrent que pour $m \in \mathbb{N}^\star$, $I_m > 0$. En particulier $I_{2n} > 0$ positif pour $n \in \mathbb{N}^\star$, mais aussi $I_0 = 1 > 0$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^\star$, par décroissance de la suite (I_n) établie en Q.8.

$$I_{2n} \leqslant I_{2n-1} \leqslant I_{2n-2}$$

Donc en multipliant par $\frac{1}{I_{2n}} > 0$, il vient

$$\boxed{1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}}$$

Or d'après Q..

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \frac{\pi}{2} a_n \times (2n+1) a_n$$

Et par ailleurs, par Q.8. $\frac{I_{2n-2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n}$, donc l'encadrement précédent se réécrit

$$1 \leqslant \frac{2n+1}{2} \pi a_n^2 \leqslant \frac{2n+1}{2n}$$

ce qui donne finalement en multipliant par $\frac{2}{(2n+1)\pi} > 0$,

$$\boxed{\frac{2}{(2n+1)\pi} \leqslant (a_n)^2 \leqslant \frac{1}{n\pi}}$$

11. Par positivité de a_n, et croissance de la fonction racine carrée, il vient pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi(2n+1)}} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Or $\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$, on peut donc appliquer le théorème d'encadrement des équivalents, on en déduit

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}}$$

Puis, comme $I_{2n} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$, il vient par produit d'équivalents $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{2n}$, et donc

$$\boxed{I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

Étude de $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

12. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc F est définie sur $\mathbb{R}$ et c'est la primitive de f nulle en 0. En particulier, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$, or f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (justifié en Q.1), donc *a fortiori*

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

13. $F' = f$ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

14. Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue dans $F(-x)$ le changement de variable affine $\varphi(u) = -u$, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{1+u^4}}\,\mathrm{d}u = -F(x)$$

Ce qui montre que $\boxed{F \text{ est impaire sur } \mathbb{R}.}$

15. Soit $x \geqslant 1$, d'après la relation de Chasles $F(x) - F(1) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$. Mais par croissance de l'intégrale sachant $\forall t \in \mathbb{R}^\star$, $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \frac{1}{t^2}$, il vient

$$F(x) - F(1) \leqslant \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{x} + 1$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 1, \quad F(x) - F(1) \leqslant 1 - \tfrac{1}{x}.}$

16. Si il existe un réel A tel que F est croissante sur $[A, +\infty[$ et majorée sur $[A, +\infty[$, alors F possède une limite en $+\infty$ (et cette limite est la borne supérieure de F sur $[A, +\infty[$) et si il existe un réel A tel que F est croissante sur $[A, +\infty[$ et non majorée sur $[A, +\infty[$, alors F admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$.
D'après Q.16. pour tout réel $x \geqslant 1$, $F(x) \leqslant F(1) + 1 - \frac{1}{x} \leqslant F(1) + 1$, donc F est majorée sur $[1, +\infty[$ et F est croissante sur $\mathbb{R}$, par conséquent, le théorème précédemment cité permet de conclure que $\boxed{F \text{ possède une limite (notée } \alpha) \text{ en } +\infty.}$

17. Si f est continue sur un voisinage de 0 et admet pour développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o_0(x^n)$ alors f possède des primitives et si F est l'une d'elles, alors F admet en 0 un développement limité d'ordre $n+1$ donné par

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + o_0(x^{n+1})$$

Ici, $F(0) = 0$, donc d'après Q.4.

$$\boxed{F(x) = x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + o_0(x^9).}$$

18. $F(0) = 0$ et $F'(0) = f(0) = 1$, donc la tangente $\mathcal{T}$ a pour équation $y = F(0) + F'(0)x = x$. Or $F(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{10}x^5$, donc $\mathscr{C}_F$ est d'abord située au-dessus de la tangente $\mathcal{T}$ (lorsque $x < 0$) puis en dessous de cette même tangente. Le point $(0,0)$ est ainsi un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_F$: le graphe traverse la tangente en ce point.

19. Soit $x > 0$, alors par la relation de Chasles $F(x) - F(1) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ défini sur $[(\frac{1}{x}, 1)]$ par $\varphi(u) = \frac{1}{u}$ et il vient

$$F(x) - F(1) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\frac{-1}{u^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^4}}}\,\mathrm{d}u = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{u^4+1}}\,\mathrm{d}u = -\left(F\left(\frac{1}{x}\right) - F(1)\right)$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x > 0,\ F(x) = 2F(1) - F\left(\tfrac{1}{x}\right).}$

20. F est continue en 0, par composition des limites on en déduit $\lim_{x\to+\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = F(0) = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2F(1)$ ce qui donne

$$\boxed{\alpha = 2F(1)}$$

21. La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$ et impaire, avec $\lim_{-\infty} F = -2F(1),\ F(0) = 0,\ \lim_{+\infty} F = +\infty$. En $(1, F(1))$, la tangente a pour équation $y = F(1)x + F'(1)(x-1)$ soit $\boxed{y = F(1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1).}$ On peut alors esquisser le graphe de F,