La qualité de la rédaction, la clarté et la rigueur des raisonnements et la propreté seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Problème : Noyaux itérés

Notations valables pour tout le problème.

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2
- E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$.
- On notera 0_E le vecteur nul de E
- id_E désigne l'application identité de E
- Si f est un endomorphisme de E, $\mathrm{Im}(f)$ désigne son image et $\ker(f)$ son noyau.
- On pose $f^0 = \mathrm{id}_E$ et, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $f^k = f \circ f^{k-1}$.

Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout endomorphisme f de E, il existe un entier p qui vérifie :

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} 1 \leqslant p \leqslant n \\ E = \ker f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p \end{array} \right.$$

1. Dans cette question, supposons f bijectif. Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
   En déduire une valeur de p satisfaisant (1).

2. **Étude d'un premier exemple**
   Dans cette question, $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f l'endomorphisme vérifiant :

$$f(e_1) = 4e_1 - 2e_2 - 4e_3,\ f(e_2) = -e_1 - e_2 + e_3 \qquad \text{et} \qquad f(e_3) = 5e_1 - e_2 - 5e_3$$

   (a) Démontrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2)$.
   (b) Déterminer une base de $\ker f$.
   (c) Peut-on choisir $p = 1$?
   (d) Calculer $f^2(e_1), f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f^2)$.
   (e) Déterminer une base de $\ker(f^2)$ et en déduire que $p = 2$ convient.

3. **Cas général** Dans cette question, on suppose que f n'est pas bijectif.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$$

   (b) Pour tout entier naturel k, on pose $a_k = \dim \ker(f^k)$. Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) On pose $F = \{k \in \mathbb{N},\ a_k = a_{k+1}\}$. Montrer que F est un ensemble non vide.
   (d) En déduire l'existence d'un entier $p \geqslant 1$, qui vérifie les deux conditions :
   - pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant p-1$:

$$\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$$

   - $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$

   (e) Montrer que pour tout entier naturel $k \geqslant p$:

$$\ker(f^k) = \ker(f^p)$$

   (f) Déduire que

$$E = \ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$$

Partie B

Dans toute la suite du problème, p désigne le plus petit entier vérifiant (1) et on admet que c'est celui qui a été obtenu à la question 3d de la partie A.

Dans cette partie, on étudie des cas particuliers.

4. **Étude d'un deuxième exemple** Dans cette question $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et f l'endomorphisme vérifiant :

$$f(e_1) = e_1 - e_2,\ f(e_2) = -2e_2 - e_3 \qquad \text{et} \qquad f(e_3) = -e_1 + 3e_2 + e_3$$

Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$f(\varepsilon_1) = 0_E,\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \qquad \text{et} \qquad f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$$

En déduire que $p = 3$.

5. Dans cette question, on suppose $p = n$.

   (a) Prouver que, pour tout entier k compris entre 0 et n, $\dim\ker(f^k) = k$. En déduire que f^n est l'endomorphisme nul et que f^{n-1} n'est pas l'endomorphisme nul. On dit alors que f est un endomorphisme nilpotent d'ordre n.

   (b) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit libre.

   (c) Justifier que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

   (d) En déduire le rang de f.

6. On suppose ici que $p \geqslant 2$ et que l'on a de plus $E = \ker(f^p)$.

   (a) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant p-1$, on peut définir un sous-espace vectoriel, non réduit au vecteur nul, supplémentaire de $\ker(f^k)$ dans $\ker(f^{k+1})$.

   (b) En déduire l'existence d'une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E telle que :

$$f(e_1) = 0_E \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![2, n]\!],\ f(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_{k-1})$$