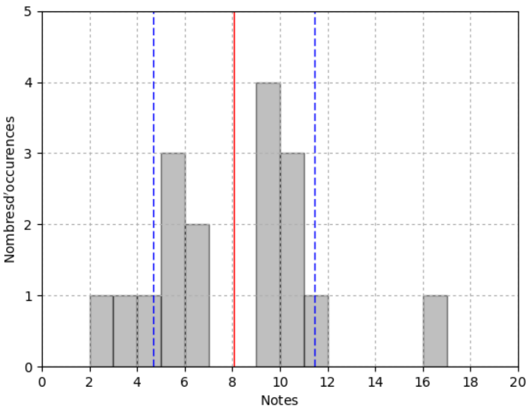
1. Résultats du DS 7

Le devoir surveillé possède un barème initial sur 69 donnant une moyenne brute de 5.15.
En modifiant seulement le barème (soit sur 44), on obtient la moyenne : 8.05.

Note	Rang
16.2	1
11.0	2
10.7	3
10.5	4
10.3	5
9.8	6
9.8	6
9.6	8
9.1	9
6.9	10
6.6	11
5.7	12
5.3	13
5.3	13
4.6	15
3.0	16
2.5	17

Moyenne : 8.05/20
Écart-type : 3.39

Note maximale : 16.2/20
Note minimale : 2.5/20



2. Rapport de correction

2.1 Questions de cours

1. Attention à bien connaître les hypothèses pour la formule de Taylor Young (classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour appliquer en $a \in I$ la formule à l'ordre n.) Ne pas oublier non plus la partie en $o(x-a)^n$.

2. Très important de connaître plusieurs méthodes et de bien savoir laquelle s'applique dans quelle situation. L'exercice de TD utilisait 2 de ces méthodes. En particulier, distinguer clairement le cas de la dimension finie du cas de la dimension infinie.
   D'autre part, si on procède par analyse-synthèse, il n'y a pas à montrer au préalable que la somme est directe. La partie analyse montre justement que la somme est directe (unicité de l'écriture en somme de deux vecteurs de F et G.)

3. Faire bien apparaître que le théorème fondamental assure qu'une fonction f continue sur un intervalle I possède une primitive sur I. Bien comprendre que $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ en est une donc que $F' = f$ (et non pas $F' = f - f(x_0)$ comme rencontré bien trop souvent dans la dernière partie du problème).

2.2 Exercices d'application du cours

1.a. Il est impotant d'avoir en tête que pour montrer la négation de $\forall (u,v) \in F^2,\ \forall (a,b) \in \mathbb{K}^2, au+bv \in F$, on doit donner un exemple précis de $(u,v) \in F^2$ et de $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $au+bv \notin F$. Une phrase générale du type « La somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante n'est pas toujours une suite croissante ou décroissante » ne suffit pas.
Par ailleurs, la définition d'une suite monotone n'est pas toujours correcte.

1.b. Il faut penser à caractériser les suites bornées à l'aide du module ou de la valeur absolue. La définition par suite minorée et majorée est lourde à manipuler, donc vous devez toujours utiliser la définition : u est bornée lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$$

L'utilisation de l'inégalité triangulaire permet alors une vérification aisée de la stabilité par combinaison linéaire.

1.c. La non appartenance de $0_{\mathbb{R}^N}$ permet d'affirmer sans autre argument que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E, ce qui a été plutôt bien vu dans l'ensemble.

2.a. Question plutôt bien traitée en général.

2.b. Question plutôt bien traitée. Pour la structure de G, le plus efficace est bien sûr d'écrire G sous forme $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ avec pour $i \in [\![0,2]\!]$, $f_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^i \end{array} \right.$. Attention, si vous identifiez fonction polynôme et polynôme, il est préférable de l'expliciter clairement.

2.c. La méthode par analyse synthèse est plutôt bien connue, mais souvent précédée d'une inutile preuve de $F \cap G = \{0_E\}$. En effet, dans l'analyse, vous montrez que si $f \in E$ s'écrit comme somme de $g \in F$ et de $h \in G$, alors g et h sont uniques. Ce qui montre que $F \cap G = \{0_E\}$.

3.a. Question assez bien traitée, même si la formulation initiale du raisonnement n'est pas toujours correcte. Rappelons qu'une preuve de liberté pour la famille $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ commence par
Soit $(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E$.
Et se termine par
$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \lambda_i = 0$.
Toute formulation alternative est généralement fausse !

3.b. Très bien pour F s'écrit sous forme de Vect, donc F est un sous-espace vectoriel de E.
Beaucoup moins bien pour la proposition d'une base de F, car confusion fréquente entre $E = \mathbb{R}_4[X]$ et F.
Bien sûr, (P_1, P_2, P_3) qui contient 3 polynômes ne peut pas être une base de E qui est de dimension 5.
Il suffisait ici de dire que par définition d'une famille génératrice, $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ admet (P_1, P_2, P_3) pour famille génératrice, et que cette famille étant libre, elle forme une base de F.

3.c. Méthode bien connue, pas toujours très bien rédigée.

3.d. La définition de 1 est une racine multiple de P n'est pas connue, ce qui n'a pas permis de faire la question correctement. 1 est racine multiple lorsque 1 est racine d'ordre au moins 2, ce qui peut se caractériser de deux façons possibles : $P(1) = P'(1) = 0$ (caractérisation par les racines des polynômes dérivés successifs) ou $(X-1)^2 | P$. Les deux caractérisations pouvaient être utilisées ici.

3.e. Peu traitée, cette question était l'occasion d'utiliser une méthode valable en dimension finie.

2.3 Problème de synthèse en analyse

1. L'étude de la parité est presque toujours omise alors qu'il faudrait commencer par là !
La justification de la régularité (ici classe $\mathscr{C}^\infty$) est rarement satisfaisante. Attention, une composée de fonctions $\mathscr{C}^k$ sur I n'est pas toujours $\mathscr{C}^k$ sur I. Exemple : $x \mapsto x-2$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ l'est également, mais la composée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ ne l'est pas puisqu'elle n'est même pas définie sur cet intervalle.

2. Même remarque que Q.1. pour la justification du caractère $\mathscr{C}^\infty$ de h.
La récurrence n'a pas toujours été vue pour l'expression de la dérivée n-ème de h.
Beaucoup de maladresses dans les calculs de dérivées. Ici il fallait reconnaître $\lambda u^{-n-\frac{1}{2}}$ pour avoir une expression simple à dériver.

3. Il faut réfléchir à l'enchaînement des questions. Certes, la fonction h est usuelle et son DL est au programme de PCSI, mais vue la question précédente, il fallait préférentiellement penser à redémontrer ce DL au moyen de la formule de Taylor Young. La question a été plutôt mal réussie. Attention à ne surtout pas proposer une suite de coefficients dépendant de x. (Confusion entre $h^{(n)}(0)$ et $h^{(n)}(x)$.)

4. Le lien entre f et h n'a pas été fait, donc beaucoup de calculs longs, inutiles et faux. C'est plutôt décevant sur une question aussi simple.

5. Attention à bien penser à préciser que (a_n) est à termes strictement positifs avant de comparer le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ à 1. C'était clairement la bonne méthode, meilleure que l'étude du signe de $a_{n+1} - a_n$. De façon générale, lorsque la suite est définie par des produits/quotients, ce sera celle à employer (lorsqu'elle sera à termes strictement positifs bien sûr !). Dans tous les cas, n'oubliez pas de quantifier n avant d'introduire $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ou $a_{n+1} - a_n$.

6. L'application du théorème de convergence monotone a été plutôt bien vue.

7. Méthode connue. Les rapports de concours mentionnent que les justifications « par linéarité de l'intégrale » et « par croissance de l'intégrale » sont attendues.

8. Les intégrales de Wallis, déjà rencontrées en DM dans l'année doivent absolument être maîtrisées. Personne n'a su trouver la relation de récurrence. Il faut donc vous y exercer davantage. Il s'agit d'une intégration par parties et de l'écriture de t^2 sous la forme $1 - (1 - t^2)$ dans le cas de l'écriture de l'énoncé, ou de la relation $\cos^2 = 1 - \sin^2$ dans le cadre plus habituel du DM.

9. Question étonnamment peu traitée. Pourtant, les expressions étant données, il suffisait de les vérifier par récurrence. C'est hyper classique et à savoir faire proprement et rapidement.

10. Une seule personne a reconnu que l'encadrement $I_{2n} \leqslant I_{2n-1} \leqslant I_{2n-2}$ à l'origine de l'encadrement demandé était une conséquence immédiate de Q.7. (monotonie de (I_n).)
Personne n'a vu dans le membre de droite de l'encadrement la possibilité de le simplifier immédiatement avec Q.8.
Il faut donc là encore mieux maîtriser l'enchaînement des questions pour s'aider des questions précédentes afin de répondre aux suivantes efficacement.

11. Conséquence immédiate de Q.10, donc très décevant d'avoir si peu de réussite sur cette question.

12. Le lien avec le théorème fondamental de l'analyse est souvent évoqué, mais de façon incorrecte, car F' est souvent fausse (cf remarques sur le cours)

13. L'expression de F' étant incorrecte très souvent, la monotonie de F l'a été aussi.

14. La méthode de changement de variable est souvent mal maîtrisée, mais surtout, vous ne partez pas de ce qu'il faut. Pour montrer que F est impaire, vous devez partir de soit « $x \in \mathbb{R}$· $F(-x) =$ » et l'exprimer en fonction de $F(x)$. Or vous partez souvent de $F(x)$... pour arriver à ... $F(x)$.

15. Très simple par la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale, mais l'utilisation de la relation de Chasles n'a presque jamais été vue.

16. Confusion entre pour tout x, $F(x) \leqslant M$ et pour tout x, $F(x) \leqslant G(x)$. La première assertion montre que F est majorée, mais pas la deuxième (penser à $F(x) = x$ et $G(x) = x + 1$).

17. Il s'agissait de faire le lien avec Q.4. par primitivation des DL, ce qui n'a jamais été énoncé.

18. Découlait immédiatement de 17. et comme cette dernière n'a jamais été correcte, les quelques réponses proposées ont été fausses.

19-21 non traitées.