Calculatrice interdite. Durée : 4h.

Concernant la partie texte des devoirs

T1 Laisser une marge suffisante (environ 4 cm s'il n'y en a pas déjà une).

T2 Soigner la présentation et l'écriture. Aérer suffisamment.

T3 Mettre en valeur les réponses, $\boxed{\text{en encadrant les résultats}}$. Souligner les résultats intermédiaires pour montrer les étapes de votre raisonnement.

T4 L'utilisation d'abréviations dans une copie est fortement déconseillée (cf. rapports de concours).

T5 Respecter et rappeler la numérotation de l'énoncé, et lorsqu'un résultat établi dans une question antérieure est utilisé, en citer précisément le numéro.

T6 Mettre en évidence les différentes parties du sujet et laisser un espace suffisant entre chaque question.

Exercice 1 - Questions de cours

1. **Dénombrement**. E et F sont deux ensembles finis.
   1.1. Comparer $\operatorname{Card} E$ et $\operatorname{Card} F$, lorsqu'il existe une injection de E sur F, même chose lorsqu'il existe une surjection de E sur F.
   1.2. Dénombrer les parties d'un ensemble E fini de cardinal n.
2. **Déterminants**. Pour les questions suivantes, E est un espace vectoriel de dimension n et de base e.
   2.1. Donner la définition d'une forme alternée sur E^n.
   2.2. Que dire d'une forme linéaire par rapport à chaque variable et alternée sur E^n ? (2 réponses différentes attendues)
   2.3. Définir le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$.
   2.4. Écrire la formule du développement du déterminant d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par rapport à sa j-ème colonne, lorsque j est fixé dans $[\![1, n]\!]$.
3. **Probabilités**.
   3.1. Donner la définition d'un système complet d'événements.
   3.2. Donner la définition d'une probabilité.
   3.3. Donner la formule des probabilités totales.

Exercice 2 - *Toutes les questions sont indépendantes*

1. Trouver les valeurs de a pour lesquelles $e' = ((a,1,1),(1,a,1),(1,1,a))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. *On rappelle que* $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A^T = -A\}$.
   Montrer que si $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ avec n entier naturel impair, alors A est non inversible.
3. Existe-t-il $A \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Problème

n est un entier naturel non nul.
Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ l'application $f^k : E \to E$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

On considère $\tau : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array} \right.$.

PARTIE I

1. Vérifier que τ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit P un polynôme non nul de degré d et de coefficient dominant a_d. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\tau(P)$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$

$$\tau^k(P) = P(X+k)$$

4. Soit M la matrice de τ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ (qu'on notera $\mathscr{B}_0$). Préciser le nombre p de lignes et de colonnes de M, puis pour $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, donner $[M]_{i,j}$ *Attention au décalage : les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 1.* Écrire alors M.

5. En déduire $\det(\tau)$. Quelle propriété de τ peut-on en déduire ?

6. On introduit $\tau' : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X-1) \end{array} \right.$. Quelle relation peut-on écrire entre τ et τ' ?

7. Donner (sans nouvelles justifications) la matrice M' de τ' dans $\mathscr{B}_0$. Quelle relation peut-on écrire entre M et M' ?

8. **Application.** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et en déduire la formule d'inversion

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$$

PARTIE II

On considère maintenant $\delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n(X) & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.

9. Trouver une relation entre τ et δ et en déduire que δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

10. Soit P un polynôme non constant, exprimer le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$ en fonction du degré d et du coefficient dominant a_d de P.

11. En déduire que $\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$ puis prouver à l'aide du théorème du rang que $\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

12. Montrer que plus généralement,

$$\forall j \in [\![0, n+1]\!], \quad \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \forall j \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

13. Que peut-on dire de δ^{n+1} ?

14. Déduire alors des questions 9 et 13 que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} \tau^i(P) = 0$$

15. Conclure à l'aide de 3 que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} P(i) = 0$$

PARTIE III

Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S(p, 0) = 0$. p et n sont pour toute la partie deux entiers non nuls.

16. Soit $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$; rappeler la définition de f est surjective.
17. Expliciter les surjections de $[\![1, 3]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$.
18. Que peut-on dire de f si c'est une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
19. En déduire la valeur de $S(n, n)$.
20. f peut-elle être surjective de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n + 1]\!]$? Donner la valeur de $S(n, n + 1)$.
21. *Question plus difficile* Montrer que $S(n + 1, n) = \frac{n(n+1)!}{2}$.
22. Combien y a-t-il d'applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
23. Soit $k \in [\![1, n]\!]$; avec les notations de l'énoncé, combien y a-t-il d'applications f de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ telles que $f([\![1, p]\!]) = [\![1, k]\!]$? F étant une partie quelconque de $[\![1, n]\!]$ à k éléments, donner (sans nouvelle justification) le nombre d'applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ telles que $f([\![1, p]\!]) = F$?
24. En déduire pour $k \in [\![1, n]\!]$ le nombre d'applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ telles que $\operatorname{Card} f([\![1, p]\!]) = k$.
25. Montrer finalement que

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p, k)$$

26. À l'aide de la question 8 simplifier enfin les expressions

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}$$