Exercice 1 - Voir le cours

Exercice 2

1. e' est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si $\det_e(e') \neq 0$, où e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\det_e(e') &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\
&\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{linéarité / 1ère colonne}}{=} (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{matrice triangulaire}}{=} (a+2)(a-1)^2
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{e' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ si, et seulement si } a \notin \{-2, 1\}}$$

2. Soit n entier naturel impair et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. $A = -A^T$, donc $\det(A) = \det(-A^T) = (-1)^n \det(A^T)$ par linéarité par rapport à chaque colonne. Mais de plus, $\det(A) = \det(A^T)$, donc $\det(A) = (-1)^n \det(A)$. En outre, n étant impair, $(-1)^n = -1$, donc $\det(A) = -\det(A)$.
On en déduit $\det(A) = 0$, ce qui est caractéristique de $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$\boxed{\text{Lorsque } n \text{ est impair, toute matrice antisymétrique de taille } n \text{ est non inversible.}}$$

3. Calculons $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effectuant les opérations $L_5 \leftarrow L_5 + L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$, il vient

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Alors si $A \in \mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\det(A^2) = -4$. Mais $\det(A^2) = \det(A)^2$ et $\det(A) \in \mathbb{R}$, donc c'est impossible.

$$\boxed{\text{L'équation } X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ n'a donc pas de solution dans } \mathscr{M}_5(\mathbb{R}).}$$

Problème

PARTIE I

1. Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\tau(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) = \lambda \tau(P) + \tau(Q)$$
Donc τ est linéaire.
En outre, si P est un polynôme de degré au plus n, $\tau(P)$ est un polynôme de même degré que P donc aussi de degré au plus n. Donc $\tau(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et ainsi,
$$\boxed{\tau \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])}$$

2. Soit P polynôme non nul de degré $d \in [\![0,n]\!]$ et de coefficient dominant a_d.
On écrit P sous la forme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Alors
$$\tau(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k$$
Or, $\deg(a_d(X+1)^d) = d$ car $a_d \neq 0$ et $\deg\left(\sum_{k=0}^{d-1} a_k(X+1)^k\right)$ est de degré strictement inférieur à d. Donc $\deg(\tau(P)) = d$, et de plus le coefficient de $\tau(P)$ en X^d est a_d. Donc
$$\boxed{\deg(\tau(P)) = d = \deg(P) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{cd}(\tau(P)) = \mathrm{cd}(P) = a_d}$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(k) : \tau^k(P) = P(X+k)$. Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(k)$ est vrai pour tout entier k.
   - **Initialisation.** Pour $k=0$, $\tau^0(P) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}(P) = P = P(X+0)$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Alors
   $\tau^{k+1}(P) = \tau \circ \tau^k(P) \overset{\text{HR}}{=} \tau(P(X+k)) = P(X+1+k)$, donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
   - **Conclusion.** Par principe de récurrence, on en déduit
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \tau^k(P) = P(X+k)}$$

4. $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, donc la matrice de l'endomorphisme τ a $n+1$ lignes et colonnes.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$, par la formule du binôme, $\tau(X^k) = (X+1)^k = \sum\limits_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} X^l$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$, le coefficient ligne i, colonne j de M matrice de τ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la coordonnée de $(X+1)^{j-1}$ selon X^{i-1}, on en déduit
$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2, \quad \begin{cases} [M]_{i,j} = \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} \text{ si } i \leqslant j \\ 0 \text{ si } j < i \end{cases}}$$
De façon explicite,
$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

5. M est une matrice triangulaire, donc $\det(M) = \prod_{i=1}^{n+1} [M]_{i,i} = 1$.
$M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_0}(\tau)$, donc $\det(\tau) = 1$. On en déduit que $\det(\tau) \neq 0$ et donc

$$\boxed{\tau \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

6. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\tau' \circ \tau(P) = \tau'(P(X+1)) = P(X-1+1) = P$ et $\tau \circ \tau'(P) = \tau(P(X-1)) = P(X+1-1) = P$. Ainsi, $\tau \circ \tau' = \tau' \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. On en déduit que

$$\boxed{\tau' \text{ est la bijection réciproque de } \tau.}$$

7. On procède comme en 4. pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, par la formule du binôme, $(X-1)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} X^\ell$, ce qui permet d'en déduire

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad [M']_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{si } i \geqslant j \end{cases}$$

Et donc

$$\boxed{M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & \cdots & (-1)^{n-1} n \\ \vdots & \ddots & \ddots & & (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Et comme $M' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_0}(\tau') = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_0}(\tau^{-1}) = (\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_0}(\tau))^{-1}$, on peut écrire

$$\boxed{M' = M^{-1}}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les $n+1$ égalités $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\quad v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j$ se traduisent par l'unique égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{Q = M^T}$ convient.

On a montré que M est inversible d'inverse M', donc M^T est inversible d'inverse M'^T, ce qui permet de déduire de l'égalité matricielle précédente l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = M'^T \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

On explicite chacune des $n+1$ égalités scalaires associées, ce qui donne

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad u_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} v_j$$

Et ceci est valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc on a démontré

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} v_j}$$

PARTIE II

9. Clairement, $\boxed{\delta = \tau - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}.}$
   Et on en déduit donc que δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ comme combinaison linéaire d'endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

10. Soit P polynôme non constant qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \in \mathbb{N}^\star$ et $a_d \neq 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\begin{aligned}\delta(P) &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left((X+1)^k - X^k\right) \text{ par linéarité de } \delta \\ &= a_d \left(\sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} X^i\right) + \sum_{k=1}^{d-1} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i\right) \text{ par la formule du binôme de Newton}\end{aligned}$$

   Le polynôme $a_d \left(\sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} X^i\right)$ est de degré $d-1$ et de coefficient dominant da_d, car d et a_d sont non nuls. Le polynôme $\sum_{k=1}^{d-1} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i\right)$ est de degré au plus $d-2$.

   Et on en déduit que $\boxed{\delta(P) \text{ est de degré } d-1 \text{ et de coefficient dominant } da_d.}$

11. On déduit de 10 que si P est non constant, alors $\delta(P) \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, autrement dit, $P \notin \ker(\delta)$. Par contraposée, on en déduit déjà que $\ker(\delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Mais réciproquement, si P est constant, alors $P(X+1) - P(X) = 0$ et donc $P \in \ker(\delta)$. Ainsi, on peut conclure par double inclusion

$$\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

   De plus, toujours par 10, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg(\delta(P)) \leqslant n-1$, et donc $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$: or par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}(\delta) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker(\delta) = n + 1 - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

   Par conséquent, on en déduit

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

12. Pour $j \in [\![1, n+1]\!]$, posons

$$\mathscr{P}(j) : \forall P \in \mathbb{R}_{j-1}[X], \delta^j(P) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \deg(P) \geqslant j \Rightarrow \deg\left(\delta^j(P)\right) \leqslant \deg P - j$$

   Prouvons ce résultat par récurrence.

   - **Initialisation.** Découle pour $j = 1$ de la question 10.
   - **Hérédité.** Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(j)$ vraie. Alors
     - Si $\deg P \leqslant j-1$, alors par HR, $\delta^j(P) = 0$, et donc $\delta^{j+1}(P) = 0$.
     - Si $\deg(P) = j$, alors par HR, $\delta^j(P) \in \mathbb{R}_0[X]$ et donc $\delta^{j+1}(P) = 0$.
     - Si $\deg(P) \geqslant j+1$, alors par HR $\delta^j(P)$ est non constant, donc par 9 $\deg(\delta(\delta^j(P))) = \deg(\delta^j(P)) - 1$ et de nouveau par HR, $\deg(\delta^{j+1}(P)) = \deg(P) - (j+1)$.

     La propriété est donc vraie au rang $j+1$.
   - **Conclusion.** Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $j \in [\![1, n+1]\!]$.

   Et en particulier, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\text{Si } P \in \mathbb{R}_{j-1}[X], \text{ alors } \delta^j(P) = 0, \qquad \text{et sinon } \delta^j(P) \neq 0$$

   Si bien que

$$\boxed{\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

Et de plus, on en déduit également,

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall j \in [\![0, n+1]\!], \quad \delta^j(P) \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

Donc $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$. Or par théorème du rang appliqué à δ^j,

$$\mathrm{rg}(\delta^j) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathbb{R}_{j-1}[X] = n+1-(j-1+1) = n-j+1 = \dim \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

Donc on en conclut

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\delta^j = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

13. Alors en particulier, pour $j = n+1$, on en déduit $\ker(\delta^{n+1}) = \mathbb{R}_n[X]$, et donc

$$\boxed{\delta^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])}}$$

14. Comme $\delta = \tau - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ comme vu en 9, et comme τ et id commutent, on peut écrire la formule du binôme de Newton pour expliciter δ^{n+1}, ce qui donne

$$\delta^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} \tau^i$$

Et donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on en déduit

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} \tau^i(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}}$$

15. En particulier, en remplaçant $\tau^i(P)$ par $P(X+i)$ grâce à 3 et en évaluant en 0, on en déduit

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} P(i) = 0}$$

PARTIE III

16. f est surjective de $[\![1, p]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$ lorsque

$$\boxed{\forall k' \in [\![1, n]\!], \quad \exists k \in [\![1, p]\!], \quad f(k) = k'}$$

17. Une application f de $[\![1, 3]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$ est définie par le triplet $(f(1), f(2), f(3)) \in [\![1, 2]\!]^3$. Un tel triplet représente une surjection si, et seulement si 1 et 2 sont coordonnées du triplet. Comme il y a 3 coordonnées, on peut énumérer les surjections pour lesquelles 1 apparaît 2 fois et 2 apparaît 1 fois et celles pour lesquelles 2 apparaît 1 fois et 1 apparaît 2 fois. Ce qui donne

- La surjection associée au triplet $(1, 1, 2)$.
- La surjection associée au triplet $(1, 2, 1)$.
- La surjection associée au triplet $(2, 1, 1)$.
- La surjection associée au triplet $(2, 2, 1)$.
- La surjection associée au triplet $(2, 1, 2)$.
- La surjection associée au triplet $(1, 2, 2)$.

Il y a donc 6 surjections de $[\![1, 3]\!]$ vers $[\![1, 2]\!]$, et ainsi $\boxed{S(3, 2) = 6.}$

18. On sait qu'une application d'un ensemble fini E vers un ensemble fini F de même cardinal est surjective si, et seulement si elle est bijective, donc une surjection de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même est une permutation de $[\![1, n]\!]$ (ie bijection de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même).

19. On en déduit que $\boxed{S(n, n) = n!}$ puisque d'après le cours le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

20. Toujours d'après le cours, si f est une surjection d'un ensemble fini E vers un ensemble fini F, alors $\mathrm{Card}\, E \geqslant \mathrm{Card}\, F$, donc il n'existe pas de surjection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n+1]\!]$. Et donc

$$\boxed{S(n,n+1)=0}$$

21. Soit f surjective de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$, alors f est non injective, sinon f serait bijective, ce qui est impossible puisque deux ensembles finis en bijection ont même cardinal.
Il existe donc un élément $k \in [\![1,n]\!]$ qui possède au moins 2 antécédents distincts i_1, i_2 dans $[\![1,n+1]\!]$.
Considérons A l'ensemble des antécédents de k par f, et posons

$$g : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n+1]\!]\backslash A & \to & [\![1,n]\!]\backslash\{k\} \\ i & \mapsto & f(i) \end{array} \right.$$

- g est bien définie car pour tout $i \in [\![1,n+1]\!]\backslash A,\ f(i) \in [\![1,n]\!]$ et $f(i) \neq k$ par définition de A.
- g est encore surjective. En effet, soit $j \in [\![1,n]\!]\backslash\{k\}$, alors $j \in [\![1,n]\!]$, donc j possède un antécédent $i \in [\![1,n+1]\!]$ par f. De plus, $f(i) = j \neq k$ donc $i \notin A$. Donc $i \in [\![1,n+1]\!]\backslash A$ et ainsi, $j = g(i)$, ce qui montre que tout $j \in [\![1,n]\!]\backslash\{k\}$ admet un antécédent par g.
- g est donc une surjection d'un ensemble de cardinal $n+1-\mathrm{Card}(A)$ vers un ensemble de cardinal $n-1$. On sait alors que
$$n+1-\mathrm{Card}(A) \geqslant n-1$$
Donc $\mathrm{Card}(A) \leqslant 2$; mais aussi i_1, i_2 sont deux éléments distincts de A donc $\mathrm{Card}(A) \geqslant 2$. Finalement, $\mathrm{Card}(A) = 2$ et $A = \{i_1, i_2\}$.
Il en résulte que g est une surjection entre deux ensembles de cardinal $n-1$.

D'après le cours, on peut donc affirmer que g est une bijection.
Cela montre en particulier que tout élément de $[\![1,n]\!]$ autre que k admet exactement un antécédent par f et k admet exactement 2 antécédents distincts.

On peut alors présenter le dénombrement de la façon suivante : pour construire une surjection de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$,

- On choisit l'élément k à l'arrivée qui a 2 antécédents, ce qui correspond à n possibilités.
- On choisit au départ les deux antécédents distincts i,j de k, il y a $\binom{n+1}{2}$ telles possibilités.
- On construit une bijection de $[\![1,n+1]\!]\backslash\{i,j\}$ sur $[\![1,n]\!]\backslash\{k\}$, soit $(n-1)!$ possibilités.

Et donc $S(n+1,n) = n \times \binom{n+1}{2}(n-1)!$.

De façon plus rigoureuse :

Notons $F_{n+1,n}$ l'ensemble des surjections de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ et pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons $F_{n+1,n}^{(k)}$ l'ensemble des éléments f de $F_{n+1,n}$ tels que k possède exactement 2 antécédents distincts par f.
On a donc

$$F_{n+1,n} = \bigcup_{k=1}^{n} F_{n+1,n}^{(k)}$$

Et cette réunion est disjointe. Donc

$$S(n+1,n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}\, F_{n+1,n}^{(k)}$$

Ensuite, on note pour $k \in [\![1,n]\!]$, et $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$, tel que $i<j$, $G_{i,j} = \{f \in F_{n+1,n}^{(k)},\ f(i) = f(j) = k\}$.
Alors on peut décomposer $F_{n+1,n}^{(k)}$ en la réunion disjointe

$$F_{n+1,n}^{(k)} = \bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2 \\ i<j}} G_{i,j}$$

Et donc

$$\mathrm{Card}\, F_{n+1,n}^{(k)} = \sum_{j=2}^{n+1} \sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{Card}\, G_{i,j}$$

Enfin, on a mis en évidence qu'il y a autant de permutations d'un ensemble à $n-1$ éléments que d'éléments dans $G_{i,j}$ pour $i<j$. Donc finalement,

$$\operatorname{Card} F_{n+1,n}^{(k)} = \sum_{j=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{j-1}(n-1)! = (n-1)!\sum_{j=2}^{n+1}(j-1) = (n-1)!\sum_{j'=1}^{n} j' = \frac{n(n+1)}{2}(n-1)!$$

D'où en revenant à $S(n+1,n)$, on conclut

$$\boxed{S(n+1,n) = n\frac{(n+1)!}{2}}$$

Remarque :
On vérifie a posteriori qu'on a trouvé toutes les surjections de $[\![1,3]\!]$ vers $[\![1,2]\!]$ à la question 7 puisque $S(3,2) = 2\times\frac{3!}{2} =$ et qu'on a bien trouvé 6 surjections de $[\![1,3]\!]$ vers $[\![1,2]\!]$.

22. Il s'agit d'une nouvelle question de cours,

$$\boxed{\operatorname{Card}[\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]} = n^p}$$

23. Il y a autant d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ dont l'image est $[\![1,k]\!]$ que de surjections de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,k]\!]$. Autrement dit, il y a $S(p,k)$ applications de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ d'image $[\![1,k]\!]$.
Et de même, il y a $S(p,k)$ applications de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ dont l'image est une partie F de $[\![1,n]\!]$ ayant k éléments.

24. Soit pour k fixé, $P_k = \{F\subset[\![1,n]\!],\ \operatorname{Card} F = k\}$. Alors soit Σ_k l'ensemble des applications de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$ telles que $\operatorname{Card} f([\![1,p]\!]) = k$, ainsi

$$\Sigma_k = \bigcup_{F\in P_k}\left\{f\in[\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]},\ f([\![1,p]\!]) = F\right\}$$

Et il s'agit d'une réunion disjointe, donc

$$\operatorname{Card}\Sigma_k = \sum_{F\in P_k} S(p,k) = \binom{n}{k} S(p,k)$$

$$\boxed{\operatorname{Card}\Sigma_k = \binom{n}{k} S(p,k)}$$

25. On a la décomposition $[\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]} = \bigcup\limits_{k\in[\![1,n]\!]}\Sigma_k$, et la réunion est disjointe, donc avec la question précédente on obtient

$$n^p = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} S(p,k)$$

Et comme on a posé $S(p,0)=0$, on peut aussi écrire

$$\boxed{n^p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} S(p,k)}$$

26. Posons pour $k\in\mathbb{N}$, $u_k = S(p,k)$. Alors en posant pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = n^p$, on a montré en 25

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad v_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} u_k$$

D'où par la formule d'inversion démontrée en partie I

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\quad S(p,n) = u_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k} v_k\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k} k^p\end{aligned}$$

Ce qui donne pour $p = n$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n,n) = n!}$$

Et pour $p = n+1$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1,n) = n\frac{(n+1)!}{2}}$$