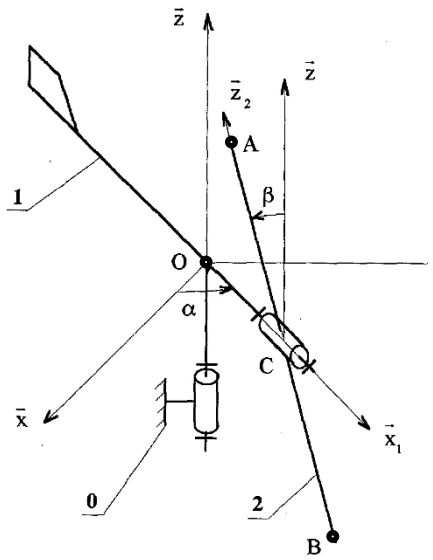
Travail de SII à faire pendant la semaine aux Carroz d'Arâches

EXERCICE 1 : EOLIENNE

Problématique :

On cherche à déterminer la vitesse au bout des pales pour optimiser la production d'énergie par la génératrice en fonction de la vitesse du vent.



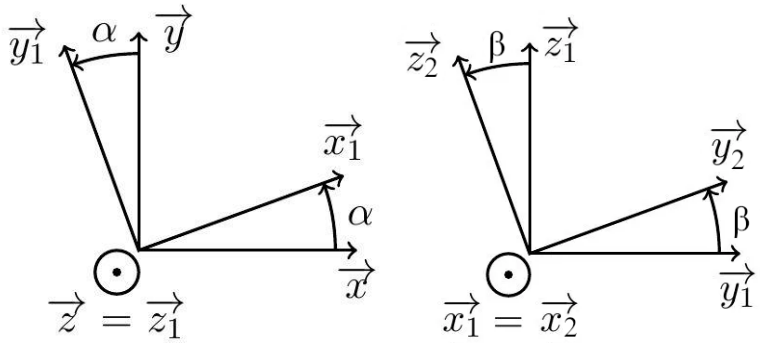
Soit un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié au support **0** d'une éolienne. La girouette **1** a une liaison pivot d'axe $(O,\vec{z})$ avec le support **0**.

Soit $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ un repère lié à la girouette **1**, on pose: $\alpha=(\vec{x},\vec{x_1})$.

L'hélice **2** a une liaison pivot d'axe $(C,\vec{x_1})$ avec la girouette **1**, tel que: $\overrightarrow{OC}=a.\vec{x_1}$ (a est une constante positive).

Soit $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ un repère lié à l'hélice **2**, de telle façon que l'axe $(C,\vec{z_2})$ soit confondu Avec l'axe AB de la pale de l'hélice. On pose: $\overrightarrow{CA}=b.\vec{z_2}$ (b est une constante positive) et $\beta=(\vec{z_1},\vec{z_2})$

Question 1 : Représenter les deux rotations planes permettant de visualiser les angles α et β. (figures de calculs de changement de base ou figures géométrales).



Question 2 : Déterminer le taux de rotation du repère $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ par rapport à $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}$

D'après la loi de composition de vitesse : $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}=\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}}+\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$

or $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}=\dot{\alpha}\vec{z}$ et $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}}=\dot{\beta}\vec{x}_1$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}=\dot{\alpha}\vec{z}+\dot{\beta}\vec{x}_1}$$

Question 3 : Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A\in 2/R}}$ en utilisant la composition des vitesses.

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/R}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A\in 1/R}}$$

Or $\overrightarrow{V_{A\in 1/R}} = \overrightarrow{V_{O\in 1/R}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$, et $\overrightarrow{V_{O\in 1/R}} = \vec{0}$ car O est sur l'axe de rotation du mouvement 1/R

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{A\in 1/R}} = -(b.\vec{z_2} + a.\vec{x_1}) \wedge \dot{\alpha}\vec{z}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{A\in 1/R}} = b\dot{\alpha}\sin(\beta)\,\vec{x_1} + a\dot{\alpha}\,\vec{y_1}$$

Et $\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{C\in 2/1}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}}$, et $\overrightarrow{V_{C\in 2/1}} = \vec{0}$ car C est sur l'axe de rotation du mouvement 2/1

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = -(b.\vec{z_2}) \wedge \dot{\beta}\vec{x}_1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = -b\dot{\beta}\,\vec{y_2}$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in 2/R}} = b\dot{\alpha}\sin(\beta)\,\vec{x_1} + a\dot{\alpha}\,\vec{y_1} - b\dot{\beta}\,\vec{y_2}}$$

Question 4 : Calculer la norme de la vitesse. Que peut-on dire de α lorsque le vent est établi et stable. Que vaut alors $\dot{\alpha}$? Donner alors la valeur de $\left\|\overrightarrow{V_{A\in 2/R}}\right\|$.

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/R}} = b\sin(\beta)\,\vec{x_1} + a\dot{\alpha}\,\vec{y_1} - b\dot{\beta}\,\vec{y_2}$$

Or $\vec{y_2} = \cos(\beta)\,\vec{y_1} + \sin(\beta)\,\vec{z_1}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{A\in 2/R}} = b\sin(\beta)\,\vec{x_1} + (a\dot{\alpha} - b\dot{\beta}\cos(\beta))\,\vec{y_1} - b\dot{\beta}\sin(\beta)\,\vec{z_1}$$

$$\Rightarrow \left\|\overrightarrow{V_{A\in 2/R}}\right\| = \sqrt{b^2\dot{\alpha}^2\sin(\beta)^2 + \left(a\dot{\alpha} - b\dot{\beta}\cos(\beta)\right)^2 + b^2\dot{\beta}^2\sin(\beta)^2}$$

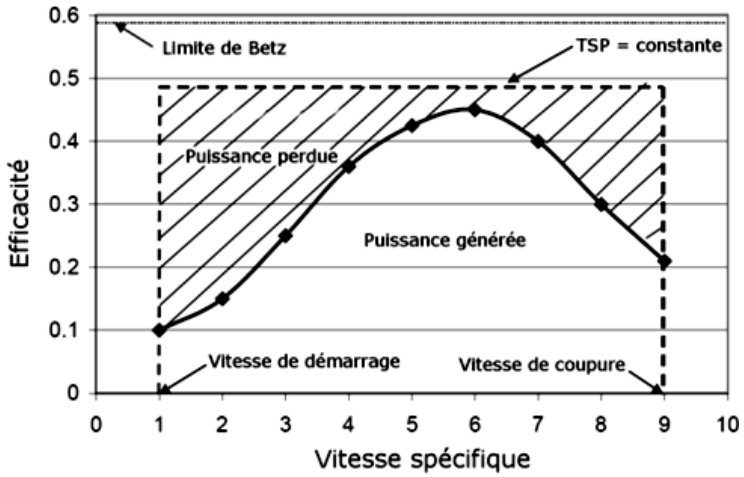
$$\Rightarrow \left\|\overrightarrow{V_{A\in 2/R}}\right\| = \sqrt{b^2\dot{\alpha}^2\sin(\beta)^2 + a^2\dot{\alpha}^2 - 2a\dot{\alpha}b\dot{\beta}\cos(\beta) + b^2\dot{\beta}^2\cos(\beta)^2 + b^2\dot{\beta}^2\sin(\beta)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{V_{A\in 2/R}}\right\| = \sqrt{b^2\dot{\alpha}^2\sin(\beta)^2 + a^2\dot{\alpha}^2 - 2a\dot{\alpha}b\dot{\beta}\cos(\beta) + b^2\dot{\beta}^2}}$$

Si le vent est établi et stable alors le système est en régime permanent, l'éolienne ne change alors plus de direction $\Rightarrow \dot{\alpha} = 0$. On a alors :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{V_{A\in 2/R}}\right\| = b\dot{\beta}}$$

Voici ci-joint le résultat d'une étude qui donne l'évolution du rendement d'une éolienne en fonction de la vitesse spécifique



Vitesse spécifique $\lambda = \frac{U}{v}$

avec U, vitesse en bout de pale et v la vitesse du vent.

Question 5 : Supposons un vent établit à 35 km.h^{-1}, que b=4m, et que le comportement aérodynamique des pales donne une vitesse de rotation $\dot{\beta} = 180$ tr/min. Déterminer la vitesse spécifique de l'éolienne. Que peut-on conclure sur l'efficacité de la production énergétique. Que peut-on proposer pour rendre l'éolienne plus performante au regard de la production d'énergie ?

$$\lambda = \frac{\left\|\overrightarrow{V_{A\in 2/R}}\right\|}{v} = \frac{4 * (180 * \frac{2\pi}{60})}{(35 * \frac{1000}{3600})} = 7.8\ (sans\ unités)$$

La production d'énergie électrique est optimale pour $\lambda = 6$ avec une efficacité de 0.45, contre les 0.3 d'efficacité pour $\lambda = 8$ nous perdons actuellement 1/3 de la production nominale. Pour que l'éolienne soit plus performante pour cette vitesse il faut diminuer la longueur des pâles (longueur optimale : 3.1m)

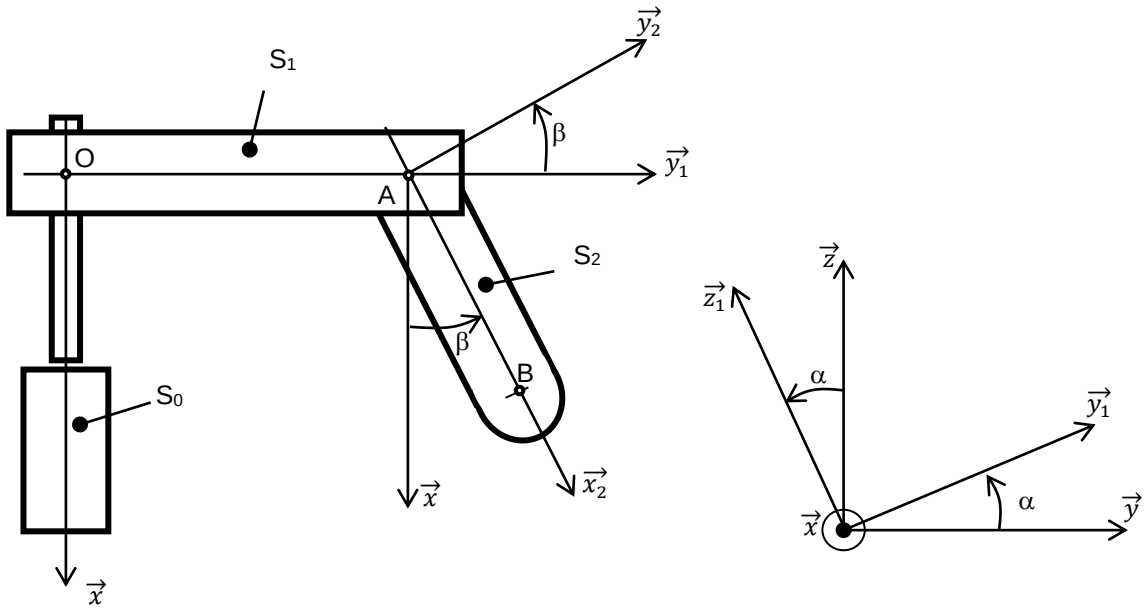
EXERCICE 2 : CENTRIFUGEUSE DU LABORATOIRE DE CHIMIE

On considère une centrifugeuse composée d'un bâti (S_0), d'un bras (S_1) et d'une éprouvette (S_2) qui peut contenir deux liquides de masses volumiques différentes (figure ci-dessous).
Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du bras (S_1), l'éprouvette (S_2) s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras et le liquide dont la masse volumique est la plus élevée va au fond de l'éprouvette. Ainsi la séparation des deux liquides est réalisée.

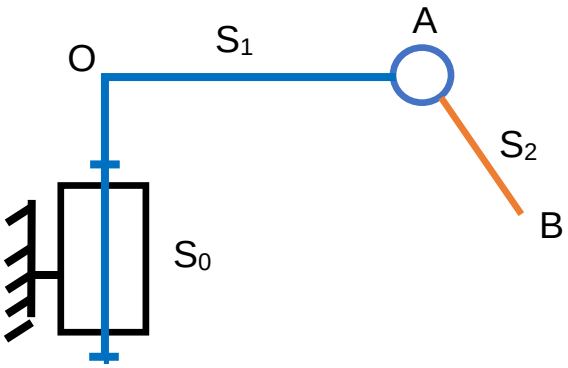
On suppose que le solide S1 est guidé en rotation par rapport au solide S0 par une liaison pivot d'axe $(0, \vec{x})$.
On suppose que le solide S2 est guidé en rotation par rapport au solide S1 par une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z_1})$.

- Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S_0) (fixe).
- Le solide (S_1) admet une rotation par rapport au solide (S_0) d'axe $(0, \vec{x})$. $R_1(O, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ un repère lié à (S_1). Posons $\alpha = (\vec{y}, \vec{y_1})$ avec α=ω.t et ω étant une constante positive exprimée en radians par seconde. On pose $\overrightarrow{OA} = a.\vec{y_1}$.

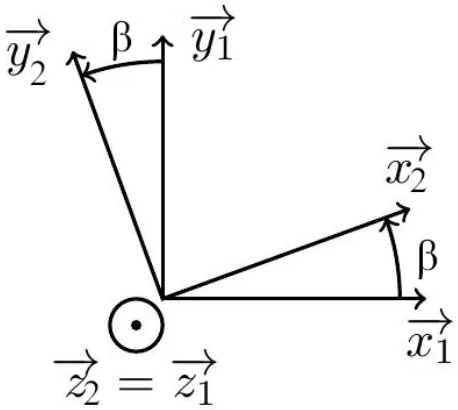
- Le solide S_2 admet une rotation par rapport à S_1 d'axe $(A, \vec{z_1})$. Alors R2 $(O, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ un repère lié à (S_2). On pose $\beta = (\vec{x_1}, \vec{x_2})$, β étant une fonction du temps inconnue. Soit B le centre d'inertie de (S_2) tel que : $\overrightarrow{AB} = b.\vec{x_2}$ (b constante positive exprimée en mètre).



Question 1 : Tracer le schéma cinématique de la centrifugeuse dans le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ en supposant que α=0.



Question 2 : Tracer la figure de changement de base de R_2 vers R_1.



Question 3 : Déterminer les vecteurs taux de rotation :

- Du solide S_1 par rapport au solide S_0, $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\alpha}\vec{x}$
- Du solide S_2 par rapport au solide S_1, $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\beta}\vec{z}_1$
- Du solide S_2 par rapport au solide S_0.

$$D'après\ la\ loi\ de\ composition\ des\ vitesses\ de\ rotation :$$

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{\alpha}\vec{x} + \dot{\beta}\vec{z}_1$$

Question 4 : Donner la vitesse en O du solide S1 par rapport au solide S_0.

$\overrightarrow{V_{O\in 1/0}} = \vec{0}$, car O est sur l'axe de rotation du mouvement 1/0

Question 5 : Déterminer la vitesse en A du solide S_1 par rapport au solide S_0.

$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = -a\vec{y}_1 \wedge \dot{\alpha}\vec{x}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = a\dot{\alpha}\vec{z}_1$$

Question 6 : Donner la vitesse en A du solide S_2 par rapport au solide S_1.

$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \vec{0}$, car A est sur l'axe de rotation du mouvement 2/1

Question 7 : Déterminer la vitesse en B du solide S_2 par rapport au solide S_1.

$$\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = -b\vec{x}_2 \wedge \dot{\beta}\vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = b\dot{\beta}\vec{y}_2$$

Question 8 : Déterminer la vitesse en B du solide S_1 par rapport au solide S_0.

$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = -b\vec{x}_2 \wedge \dot{\alpha}\vec{x}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = b\dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{z}_1$$

Question 9 : En déduire la vitesse en B du solide S_2 par rapport au solide S_0.

Loi de compositions : $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = b\dot{\beta}\vec{y}_2 + b\dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{z}_1$$

On montre que le vecteur accélération du point B appartenant à S2 par rapport à S0 est égale à :

$$\vec{a}_{B\in 2/0} = b.\ddot{\beta}.\vec{y_2} - b.\dot{\beta}^2.\vec{x_2} + b.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.\boldsymbol{cos}\,\beta\,.\vec{z_1} + (a + b.\boldsymbol{sin}\,\beta).\ddot{\alpha}.\vec{z_1} - (a + b.\boldsymbol{sin}\,\beta).\dot{\alpha}^2.\vec{y_1}$$

On suppose que ω est constante et que β=π/2

$$\boldsymbol{cos}\,\beta = \mathbf{0}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{sin}\,\beta = \mathbf{1}\ \boldsymbol{et}\ \vec{y_2} = -\vec{x_1}\ \boldsymbol{et}\ \vec{x_1} = \vec{y_2}$$

$$\dot{\alpha} = \omega \text{ et } \ddot{\alpha} = \mathbf{0},\ \dot{\beta} = \mathbf{0} \textbf{ et } \ddot{\beta} = \mathbf{0}$$

Question 10 : Donner la valeur littérale de la norme du vecteur $\vec{a}_{B\in 2/0}$.

$$\vec{a}_{B\in 2/0} = -(a+b).\omega^2.\vec{y_1}$$

$$\left\|\vec{a}_{B\in\frac{2}{0}}\right\|^2 = (a+b)^2.\boldsymbol{\omega^4}$$

Faire l'application numérique avec a=400 mm, b=250 mm et ω = 2π rad.s^{-1}.

$$\left\|\vec{a}_{B\in\frac{2}{0}}\right\| = \mathbf{25.7}\ \boldsymbol{m/s^2}$$