Correction du DM Tournant 2024 PCSI MPSI

Q1

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BE}$$

$$= a\vec{x_0} + b\vec{x_1} + c\vec{x_3} = a\vec{x_0} + b\left(\cos\theta_{10}\,\vec{x_0} + \sin\theta_{10}\,\vec{y_0}\right) + c\left(\cos\theta_{30}\,\vec{x_0} + \sin\theta_{30}\,\vec{y_0}\right)$$

or $\vec{OE} = x_E\,\vec{x_0} + y_E\,\vec{y_0}$ ce qui donne :

$$\boxed{\begin{aligned} x_E &= a + b\cos\theta_{10} + c\cos\theta_{30} \\ y_E &= b\sin\theta_{10} + c\sin\theta_{30} \end{aligned}}$$

Q2

$$\begin{cases} c\cos\theta_{30} = x_E - a - b\cos\theta_{10} \\ c\sin\theta_{30} = y_E - b\sin\theta_{10} \end{cases}$$ d'où

Q3

$$\begin{cases} c^2\cos^2\theta_{30} = \left(x_E - a - b\cos\theta_{10}\right)^2 \quad (1) \\ c^2\sin^2\theta_{30} = \left(y_E - b\sin\theta_{10}\right)^2 \quad (2) \end{cases}$$

(1) + (2) donne :

$$c^2 = \left(x_E - a - b\cos\theta_{10}\right)^2 + \left(y_E - b\sin\theta_{10}\right)^2$$

Q4 en développant on obtient :

$$c^2 = (x_E - a)^2 - 2(x_E - a)b\cos\theta + b^2\cos^2\theta_{10} + y_E^2 - 2y_E b\sin\theta_{10} + b^2\sin^2\theta_{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 - (x_E - a)^2 - y_E^2 - b^2 = -2(x_E - a)b\cos\theta_{10} - 2y_E b\sin\theta_{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\underbrace{(x_E - a)^2 + y_E^2 + b^2 - c^2}_{C} = \underbrace{2(x_E - a)b}_{A}\cos\theta_{10} + \underbrace{2y_E b}_{B}\sin\theta_{10}}$$

Q5

$A\cos\theta_{10} + B\sin\theta_{10} = C$ peut s'écrire $\sqrt{A^2+B^2}\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta_{10} + \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta_{10}\right) = C$

en posant $\sin\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\cos\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ on a bien $\tan\varphi = \dfrac{A}{B}$

et $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

d'où $\sin\varphi\cos\theta_{10} + \cos\varphi\sin\theta_{10} = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\sin(\varphi + \theta_{10}) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$\varphi + \theta_{10} = \operatorname{Arcsin}\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ d'où $\theta_{10} = \operatorname{Arcsin}\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} - \varphi$

$$\theta_{10} = \operatorname{Arcsin}\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} - \operatorname{Arctan}\frac{A}{B}$$

$$\boxed{\theta_{10} = \operatorname{Arcsin}\left[\frac{(x_E-a)^2+y_E^2+b^2-c^2}{2b\sqrt{(x_E-a)^2+y_E^2}}\right] - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x_E-a}{y_E}\right)}$$

Q6/ D'après une des équations de la question 1 on obtient :

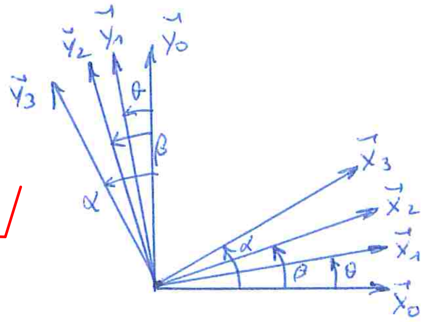
$$\sin\theta_{30} = \frac{y_E - b\sin\theta_{10}}{c}$$

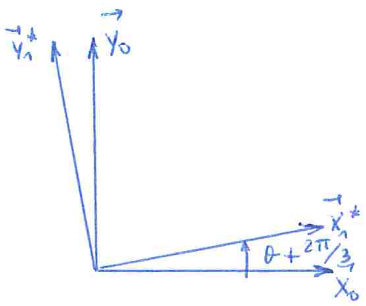
d'où $\boxed{\theta_{30} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{y_E - b\sin\theta_{10}}{c}\right)}$

Q9/ Ecrivons la fermeture géométrique du mécanisme :

$$\vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NB} + \vec{BA} = \boxed{\vec{0} = e\vec{x}_3 + d\vec{x}_2 - c\vec{x}_1^{\,*} - a\vec{x}_0 - b\vec{y}_0}$$

Q10/





(suite)

La fermeture géométrique devient :

$$\vec{0} = e\left(\cos\alpha\,\vec{x}_0 + \sin\alpha\,\vec{y}_0\right) + d\left(\cos\beta\,\vec{x}_0 + \sin\beta\,\vec{y}_0\right) - c\left(\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\vec{x}_0 + \sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\vec{y}_0\right) - \left(a\vec{x}_0 + b\vec{y}_0\right)$$

en projection sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ cela donne :

$$\boxed{\begin{cases} e\cos\alpha + d\cos\beta - c\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) - a = 0 \\ e\sin\alpha + d\sin\beta - c\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) - b = 0 \end{cases}}$$

Q11 On cherche à éliminer β des expressions on peut alors écrire :

$$\begin{cases} d\cos\beta = a + c\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) - e\cos\alpha \\ d\sin\beta = b + c\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) - e\sin\alpha \end{cases}$$

en élevant au carré chaque égalité et en faisant la somme :

$$d^2 = \left(a + c\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) - e\cos\alpha\right)^2 + \left(b + c\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) - e\sin\alpha\right)^2$$

d'où $D = d$ $\quad A = a$ $\quad C = c$ $\quad E = -e$ $\quad B = b$

A.N. $D = 153\,mm$ $\quad A = 15\,mm$ $\quad C = 83\,mm$ $\quad E = -60\,mm$ $\quad B = 138\,mm$

Q12 Lorsque $\alpha = 4$ rad $\quad \theta = 1{,}44$ rad $\simeq \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ la barrière est levée

sur l'intervalle $[2, 4]$ θ évolue proportionnellement à α.

Si on place une droite entre 2 et 4 on a $f(2) \simeq 0$ et $f(4) = 1{,}44$

d'où la pente est égale à $\frac{1{,}44 - 0}{4 - 2} = 0{,}72$

et donc $\theta = 0{,}72\,\alpha + \theta_0$

pour $\alpha = 2$ $\quad \theta = 0 = 0{,}72 \times 2 + \theta_0$

d'où $\theta_0 = -1{,}44$

Alors $\boxed{\theta = 0{,}72\,\alpha - 1{,}44}$

Document réponse

Question 7 et 8