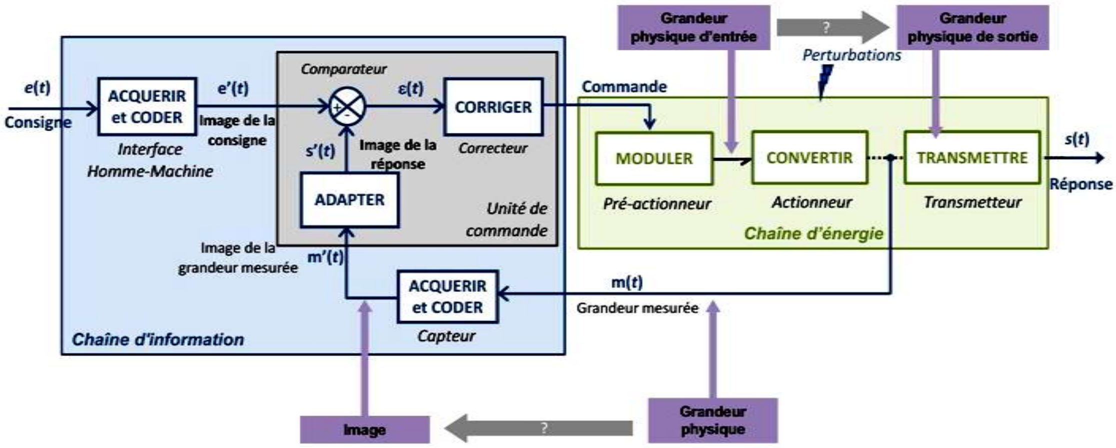
Objectif

L'objectif est de modéliser par une fonction de transfert un composant ou un système, asservi ou non, mais caractérisé par un ensemble de grandeurs scalaires. Cette fonction de transfert est alors caractéristique des équations différentielles régissant le comportement du composant ou du système. Elle permet de prévoir les performances et le comportement temporel du système pour différentes entrées.

Réciproquement, l'analyse de la réponse à une entrée test, un échelon, réponse obtenue expérimentalement ou par simulation numérique, permet de retrouver la fonction de transfert. Le modèle ainsi obtenu est appelé modèle de comportement. Les outils mis en place sont adaptés à la modélisation des composants des chaînes de puissance et d'information ainsi qu'aux différents domaines de la physique (mécanique avec prise en compte des inerties, thermique, hydraulique, électrique...).



Modéliser en SLCI : modèle et Système Linéaire Continu Invariant Pour prédire les performances d'un système par simulation ou calcul, il faut pouvoir modéliser mathématiquement son comportement. Le modèle présenté ici est dit Linéaire, Continu, Invariant. Les Systèmes pouvant être modélisés ainsi sont les SLCI.

Grandeurs temporelles, paramètres, entrées et sortie

Dans le système et les modèles étudiés, on distingue :

- les grandeurs temporelles, scalaires, qui dépendent du temps: température, position, vitesse, tension, intensité... Elles correspondent à des grandeurs échangées dans un IBD ou dans les chaînes d'information et de puissance ;
- des paramètres caractéristiques du système étudié : dimensions, résistance et inductance électrique, masse...

On distingue aussi, parmi les grandeurs temporelles, une ou plusieurs entrées et une sortie.

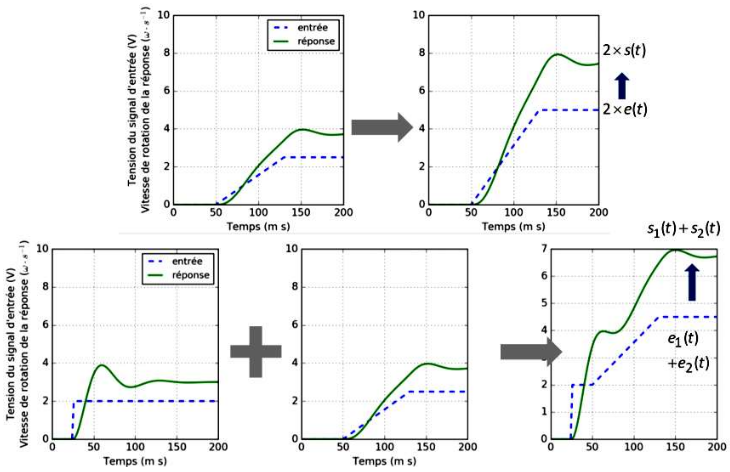
Exemple : pour un moteur électrique, les paramètres sont généralement la résistance électrique et l'inductance du bobinage, l'inertie des pièces en mouvement... Les grandeurs temporelles sont la tension d'alimentation aux bornes du moteur, l'intensité du courant, le couple (effort tournant) fourni par le moteur, le couple résistant s'opposant au mouvement... Les entrées sont généralement la tension d'alimentation et le couple résistant; la sortie la vitesse angulaire.

Comportement linéaire

On appelle réponse, l'évolution temporelle de la grandeur de sortie pour des fonctions d'entrée (signaux) données.

Lorsque le comportement est linéaire, la réponse dépend linéairement des signaux d'entrée. Conséquence pour la réponse à 1 entrée :

- si $s_1(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_1(t)$,
- si $s_2(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_2(t)$,
- alors pour un signal d'entrée $e(t)=e_1(t)+k\times e_2(t)$, la réponse est $s(t)=s_1(t)+k\times s_2(t)$.



Conséquence pour la réponse à 2 entrées :

- si $s_1(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_1(t)$ sur l'entrée e_1,
- si $s_2(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_2(t)$ sur l'entrée e_2,
- alors, si les signaux sont appliqués simultanément aux deux entrées, la réponse est $s(t)=s_1(t)+s_2(t)$.

Modèle utilisé : Système Linéaire, Continu et Invariant – SLCI

Un système de type SLCI, vérifie les hypothèses suivantes:

- les grandeurs temporelles sont des fonctions continues du temps,
- le modèle est invariant ; les paramètres physiques sont supposés constants durant la période d'étude: la réponse ne dépend pas de l'instant d'application des entrées ni des valeurs initiales;
- le modèle est linéaire.

Un SLCI est caractérisé par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants de la forme :

$$a_n\frac{d^ns}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{ds}{dt}+a_0s(t)=b_m\frac{d^me}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{de}{dt}+b_0e(t)$$

s(t): réponse et e(t) :signal d'entrée

n est l'ordre de l'équation.

Le modèle est causal : les signaux d'entrée imposent la réponse.

Le modèle peut être obtenu par application des lois de la physique ou expérimentalement.

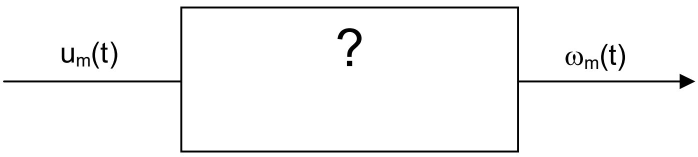
Un modèle de connaissance est un modèle déterminé par application de lois et principes de la physique.

Un modèle de comportement est déterminé à partir de réponses à des signaux tests obtenus expérimentalement ou par simulation.

Remarque : la résolution des équations différentielles nécessite aussi de connaître les signaux d'entrée, e(t), ainsi que n conditions initiales pour une équation d'ordre n.

Limites de la représentation par équations différentielles

Exemple: Considérons un moteur à courant continu. La grandeur d'entrée est une tension d'alimentation du moteur. La grandeur de sortie est la vitesse angulaire de l'axe du moteur par rapport au stator.



Les équations du modèle de connaissance usuel, sans couple résistant, sont données ci-dessous.

Équations fondamentales d'un Moteur à Courant Continu (MCC)	
$u(t)=e(t)+Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}$ (1)	u(t) : tension aux bornes du moteur
$e(t)=k_e\omega(t)$ (2)	i(t) : intensité absorbée par le moteur
$c(t)=k_C i(t)$ (3)	c(t): couple moteur
$J\frac{d\omega(t)}{dt}=c(t)$ (4)	ω(t): vitesse de rotation du moteur e(t) : force contre électromotrice du moteur R, J, k_e, k_c et L sont des caractéristiques du moteur

Les équations (3) et (4) permettent d'obtenir l'intensité en fonction de la vitesse angulaire du moteur: $i(t)=\frac{J}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt}$.

Le modèle étant invariant, J et k_c sont des constantes, et en dérivant : $\frac{di(t)}{dt}=\frac{J}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}$.

En remplaçant l'intensité et e(t) dans l'équation (1), on obtient une équation différentielle (du second ordre), caractéristique du moteur:

$$k_e\omega(t)+\frac{JR}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt}+\frac{JL}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}=u(t).$$

La résolution nécessite de connaitre la fonction u(t) ainsi que 2 conditions initiales: vitesse angulaire ω(t) et accélération angulaire $\frac{d\omega(t)}{dt}$ à un instant donnée $t_0=0$, par exemple.

L'équation différentielle caractérise le comportement du composant. Cependant, on recherche une représentation indépendante de u(t) et de ω(t).

Les équations différentielles d'un modèle de connaissance ou de comportement permettent de caractériser le comportement d'un SLCI. Mais elles ne permettent pas de relier de façon «simple» la sortie en fonction de l'entrée, ni de caractériser le comportement du système uniquement par ses paramètres caractéristiques indépendamment des grandeurs d'entrée et de sortie. La transformée de Laplace donne une réponse pratique à ce problème et la possibilité de prédire les performances du composant ou du système.

Transformée de Laplace et fonction de transfert

La transformée de Laplace

Définition

La transformée de Laplace permet de transformer les équations différentielles linéaires à coefficients constants en polynômes.
Une fonction causale est telle que f(t)=0 pour t<0.
Soit f(t) une fonction causale réelle d'une variable réelle. On définit sa transformée de Laplace L[f(t)] comme l'unique fonction F(p) de la variable complexe p telle que :

$$f(t) \xrightarrow{L[f(t)]} F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt$$

Domaine temporel Domaine symbolique (ou de Laplace)

Propriétés de la transformée de Laplace

	LINEARITE		DERIVATION	INTEGRATION	PRODUIT DE 2 FONCTIONS
f(t)	Kf(t)	$K_1g(t)+K_2h(t)$	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$\int f(t)dt$	$f(t)\cdot g(t)$
F(p)	KF(p)	$K_1G(p)+K_2H(p)$			$\cancel{F(p)\cdot G(p)}$
			avec conditions initiales nulles		

Les conditions initiales sont supposées nulles : système supposé au repos à t=0. Pour une équation différentielle d'ordre n :

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$$

C'est la condition de Heaviside.

Application : soit l'équation différentielle $5\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=v(t)$.

Q1 - Déterminer, dans les conditions de Heaviside, la transformée de Laplace de cette équation ainsi que les conditions initiales.

Fonction de transfert entre la sortie et une entrée

Fonction de transfert à conditions initiales nulles

Soit le modèle traduisant la relation entre une entrée e(t) et la sortie s(t) d'un SLCI sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$e(t)\Rightarrow a_n\frac{d^ns}{dt^n}+\ldots+a_1\frac{ds}{dt}+a_0s(t)=b_m\frac{d^me}{dt^m}+\ldots+b_1\frac{de}{dt}+b_0e(t)\Rightarrow s(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de cette équation et en considérant □ conditions initiales nulles, on a :

$$a_np^nS(p)+\ldots+a_1pS(p)+a_0S(p)=b_mp^mE(p)+\ldots+b_1pE(p)+b_0E(p)$$

soit :

$$[a_np^n+\cdots+a_1p+a_0]S(p)=[b_mp^m+\cdots+b_1p+b_0]E(p)$$

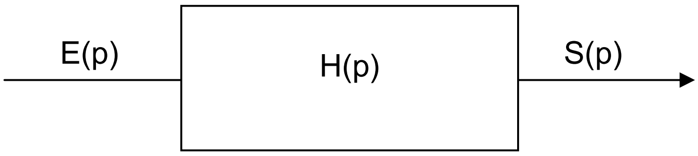
d'où :

$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{b_0+b_1p+\cdots+b_mp^m}{a_0+a_1p+\cdots+a_np^n}=\frac{N(p)}{D(p)}}$$

Le numérateur

Le dénominateur

On appelle <u>fonction de transfert</u> cette fraction de 2 polynômes de la variable p. La fonction de transfert est une fraction de deux polynômes de la variable p. La fonction de transfert caractérise un SLCI de façon indépendante de l'entrée qui lui est appliquée. Elle ne dépend que de la variable symbolique **p** et des paramètres caractéristiques du système. Elle représente l'équation différentielle reliant l'entrée à la sortie. Si H(p) est une fonction de transfert, $S(p)=H(p)\cdot E(p)$



Forme canonique d'une fonction de transfert : gain statique, ordre et classe

En factorisant chaque polynôme par le terme de plus petit degré on obtient la forme canonique :

$$\boxed{H(p)=\frac{K}{p^{\alpha}}\frac{1+\ldots p+\ldots p^2+\cdots+\ldots p^m}{1+\ldots p+\ldots p^2+\cdots+\ldots p^{n-\alpha}}}$$

K : gain statique
α : classe du système et n : ordre du système (degré dénominateur)

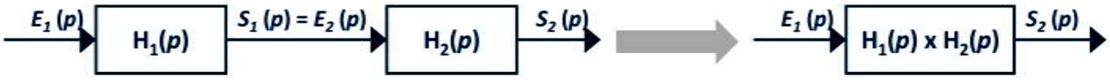
Pour α=1, la fonction de transfert peut s'écrire $H(p)=\frac{K}{p}\frac{1+\cdots}{1+\cdots}$: « le système comprend un intégrateur ».

Pour α=-1, la fonction de transfert peut s'écrire $H(p)=Kp\frac{1+\cdots}{1+\cdots}$, «le système comprend un dérivateur ».

Application: $H(p)=\frac{2+3p+5p^2}{3p^2+4p^3+7p^5}$

Fonctions de transfert en série

Des composants sont en série lorsque la sortie d'un composant est l'entrée du suivant.



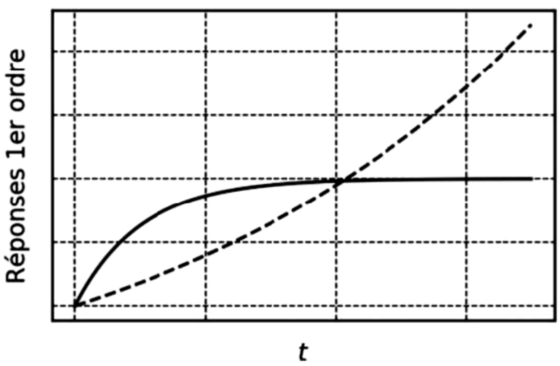
La fonction de transfert équivalente de composants en série est égale au produit des fonctions de transfert de chacun des composants.

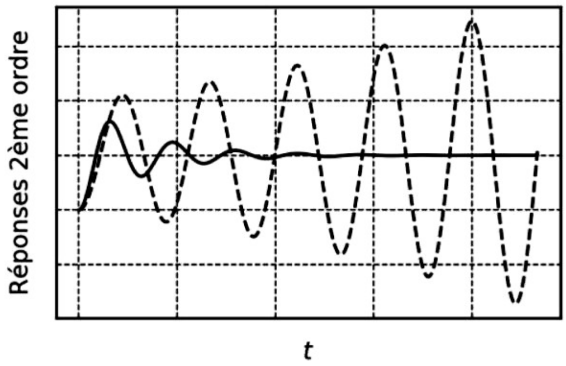
Prévoir la stabilité à partir de la fonction de transfert

Le polynôme du dénominateur D(p) est l'équation caractéristique de l'équation différentielle à coefficients constants. L'étude des solutions permet de montrer que la stabilité est assurée si les racines de ce dénominateur D(p) sont à partie réelle strictement négative : solution générale en e^{rt} avec r négatif. Les coefficients du dénominateur sont alors nécessairement tous de même signe.

Un modèle est stable si les pôles, racines du dénominateur, sont à partie réelle strictement négatives. Conséquence : un modèle stable est nécessairement de classe ≤**0** avec des coefficients au dénominateur strictement de même signe.

Ordre	Condition de stabilité :
Ordre 1 $D(p)=a_0+a_1p$	Classe 0 et coefficients du dénominateur de même signe
Ordre 2 $D(p)=a_0+a_1p+a_2p^2$	Classe ≤ 0 et coefficients du dénominateur de même signe



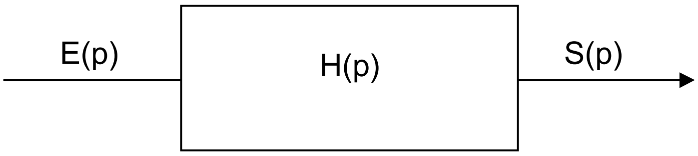


Exemples de réponses stables et instables pour des modèles de classe 0, du premier ordre, du deuxième ordre

On peut remarquer les conditions initiales nulles.

Prévoir la variation finale pour une entrée en échelon

Dans les conditions de Heaviside et le domaine de Laplace, la réponse s'écrit : $S(p)=H(p)E(p)$. Il est donc nécessaire de connaître la transformée de l'entrée pour déterminer celle de la réponse.



Transformée de Laplace d'un échelon

La transformée de Laplace d'un échelon d'amplitude E_0 d'instant initial t=0, est $\frac{E_0}{p}$

Théorème de la valeur finale

Si la valeur finale d'une fonction s(t) existe, le théorème de la valeur finale permet de la calculer à partir de sa transformée de Laplace :

$$\boxed{s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty} s(t)=\lim_{p\to 0^+} pS(p) \text{ avec } S(p)=H(p)E(p)}$$

Exemple : moteur électrique soumis à un échelon de tension d'amplitude $U_0=12$ V avec $H(p)=\frac{1}{k_e+\frac{RJ}{k_C}p+\frac{LJ}{k_C}p^2}$

Modèle stable (paramètres tous positifs), la valeur finale de vitesse de rotation existe pour une entrée en échelon.

Dans le domaine de Laplace, l'entrée est $U(p)=\frac{U_0}{p}$. La réponse s'écrit $\Omega(p)=\frac{1}{k_e+\frac{RJ}{k_C}p+\frac{LJ}{k_C}p^2}\frac{U_0}{p}$.

Le théorème de la valeur finale donne : $\omega(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}\omega(t)=\lim_{p\to 0^+} p\Omega(p)=\lim_{p\to 0^+} p\frac{1}{k_e+\frac{RJ}{k_C}p+\frac{LJ}{k_C}p^2}\frac{U_0}{p}=\frac{U_0}{k_e}$.

Cela correspond à la variation finale de vitesse angulaire induite par la variation de tension U_0.

Variation finale d'un système stable de classe 0 soumis à un échelon

Soit un système stable de classe 0 modélisé par la fonction de transfert H(p) soumis à un échelon d'amplitude E_0: $H(p)=K\frac{1+b_1p+\cdots}{1+a_1p+\cdots}$ et $E(p)=\frac{E_0}{p}$.

Le théorème de la valeur finale donne :

$$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty} s(t)=\lim_{p\to 0^+} ps(p)=\lim_{p\to 0^+} p(H(p))\frac{E_0}{p}=\lim_{p\to 0^+} H(p)E_0=KE_0.$$

Pour un système stable de classe **0**, de gain statique K, la variation finale pour une entrée en échelon d'amplitude E_0 est KE_0

Variation finale d'un système stable de classe négative (α<0) soumis à un échelon

Si le système est de classe négative : $H(p)=Kp^{-\alpha}\frac{1+b_1p+\cdots}{1+a_1p+\cdots}$ d'où : $s(+\infty)=\lim_{p\to 0^+} H(p)E_0=0$.

Pour un système stable de classe négative (dit aussi avec dérivateurs) la variation finale pour une entrée en échelon est nulle.

Théorème de superposition et précision en poursuite et régulation

Considérons un système à 2 entrées, notées E(p) et P(p) dans le domaine de Laplace.

Si le modèle est linéaire : $S(p)=H_1(p)E(p)+H_2(p)P(p)$

avec $H_1(p)=\left.\frac{S(p)}{E(p)}\right|_{P(p)=0}$ (définie avec P(p)=0)

et $H_2(p)=\left.\frac{S(p)}{P(p)}\right|_{E(p)=0}$ (définie avec E(p)=0)

La sortie du système est obtenue en additionnant les réponses à chaque entrée.

Si E(p) est une consigne et P(p) une perturbation,

- $\left.\frac{S(p)}{E(p)}\right|_{P(p)=0}$ caractérise le comportement en poursuite ;
- $\left.\frac{S(p)}{P(p)}\right|_{E(p)=0}$ caractérise le comportement en régulation.

Le «théorème» de superposition est une conséquence directe de la linéarité des équations: la réponse à plusieurs entrées est la somme des réponses à chaque entrée.

Considérons un système asservi stable et les performances pour des entrées en échelon:

- l'erreur statique est nulle si la fonction de transfert associée est de classe **0** et de gain statique unitaire (K=1);
- le système est insensible aux perturbations pour une entrée en échelon si les fonctions de transfert associées sont de classes négatives.

Comportement temporel, performances et identification des modèles élémentaires

Principe de définition d'un modèle de comportement

Définir un modèle de comportement consiste à identifier un modèle à partir de la réponse du système à un signal d'entrée test, un échelon dans notre cas. La démarche est la suivante :

- le système est considéré comme une « boite noire ». À partir d'un état stabilisé, il est soumis à un échelon d'amplitude connue sur une unique entrée ;
- la réponse obtenue expérimentalement est comparée à un catalogue de réponses types de façon à choisir un modèle de comportement (gain, intégrateur, premier ordre, $2^{ème}$ ordre...)
- les paramètres du modèle sont identifiés à partir des relevés expérimentaux.

Le modèle de comportement obtenu est toujours à conditions initiales nulles.

Seules les variations par rapport aux conditions expérimentales initiales sont prises en compte.

Nous allons nous intéresser à des réponses assimilables à celles d'un gain, d'un intégrateur, d'un dérivateur, d'un premier ordre ou d'un deuxième ordre.

Comportement temporel d'un gain pur (système à action proportionnelle) : K

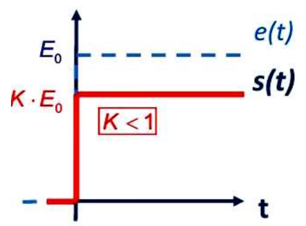
Équation temporelle et fonction de transfert d'un gain pur, système à action proportionnelle, sont :

$$s(t)=Ke(t) \text{ pour } t\geq 0 \quad \xrightarrow{L} H(p)=K$$

$$K : \text{gain statique} \qquad \text{unité} = \frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$$

La réponse à un échelon d'amplitude E_0 d'un système à gain pur (à action proportionnelle) est un échelon d'amplitude $\mathbf{KE_0}$:

$s(t)=KE_0$ pour $t\geq 0$



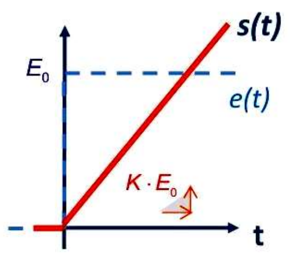
L'identification est réalisée à partir de la variation finale avec $\Delta s(+\infty)=KE_0$.

Comportement temporel d'un intégrateur : K/p

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un intégrateur sont :

$$s(t)=K\int_0^t e(\tau)d\tau \text{ pour } t\geq 0 \quad \xrightarrow{L} H(p)=\frac{K}{p}$$

$$K : \text{gain statique} \qquad \text{unité} = \frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}\cdot s^{-1}$$



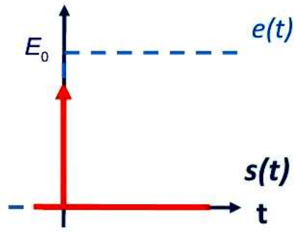
La réponse à un échelon d'amplitude E_0 d'un système intégrateur est une rampe de pente KE_0: $s(t)=KE_0\cdot t$ pour $t\geq 0$

L'identification est réalisée à partir de la pente a en régime permanent avec $a=KE_0$.

Comportement temporel d'un dérivateur : K.p

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un dérivateur sont :

La variable symbolique p est homogène à $\left[T^{-1}\right]$, soit des s^{-1}.



Fonction de transformée de Laplace unitaire: L[δ(t)]=1

$$s(t)=K\frac{de(t)}{dt} \text{ pour } t\geq 0 \qquad \xrightarrow{L} H(p)=Kp$$

$$K : \text{gain statique} \qquad \text{unité} = \frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}\cdot s$$

La réponse à un échelon d'amplitude E_0 d'un système dérivateur est une impulsion d'amplitude $\mathbf{KE_0}$:

$s(t)=KE_0\delta(t)$ avec δ(t) l'impulsion de Dirac

On retiendra : s(t)=0 pour t>0

Comportement, performances et identification d'un modèle du premier ordre

Comportement temporel et performances d'un modèle du 1er ordre : $\frac{K}{1+\tau.p}$

Fonction de transfert et équation temporelle

La fonction de transfert correspond à une équation différentielle du premier degré écrite sous la forme :

$$\tau\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\cdot e(t) \text{ pour } t\geq 0$$

La fonction de transfert d'un système du premier ordre, sous l'hypothèse des conditions initiales nulles, s'écrit :

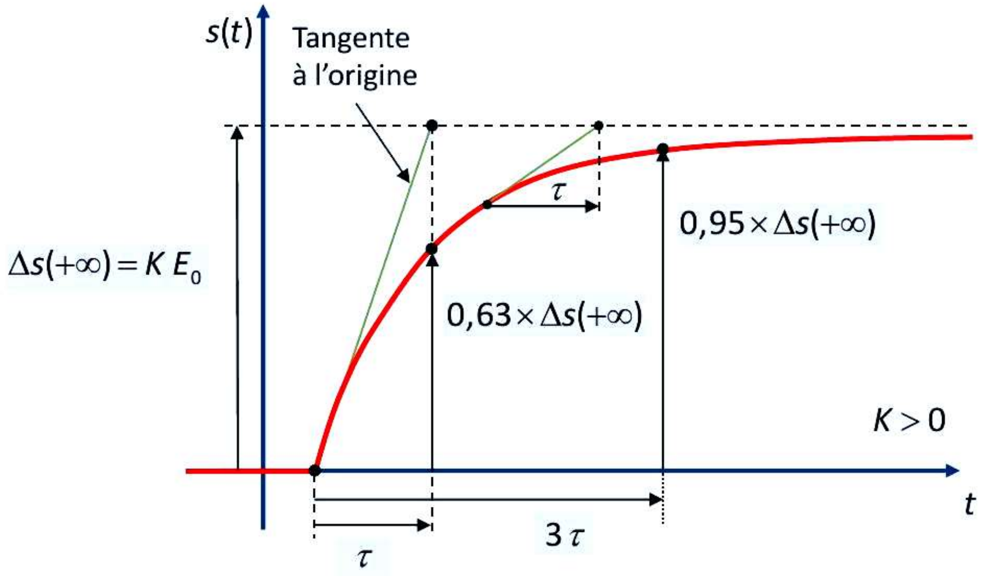
$$H(p)=\frac{K}{1+\tau p},\ \tau>0$$

K gain statique : unité $=\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$

Réponse temporelle à un échelon d'amplitude E_0 et performances

La réponse d'un premier ordre à un échelon d'amplitude E_0 a les propriétés suivantes :

Stable si τ>0, sans dépassement



Temps de réponse à 5%:**$tr_{5\%}$≈3τ**
Variation finale: KE_0
Durée pour atteindre 63% de la variation totale : constante de temps τ
La droite tangente à l'origine (ou en tout point de la courbe) coupe la valeur finale après une durée τ
On observe que :

- la constante de temps τ caractérise le comportement du système en régime transitoire (temps pour atteindre 63% puis 95% de la variation finale) ;
- le gain statique **K** caractérise le comportement du système en régime permanent : variation finale atteinte $=KE_0$.

La solution de l'équation différentielle avec condition initiale nulle et une entrée en échelon d'amplitude E_0 est :

$$s(t)=K\cdot E_0\left(1-e^{-t/\tau}\right) \text{ pour } t\geq 0.$$

pour t=0, on retrouve bien la condition initiale s(t)=0;

- pour $t\to+\infty$, on obtient la valeur finale et la variation totale, $s(+\infty)=KE_0=\Delta s(+\infty)$;
- pour $t=\tau, s(\tau)=KE_0\left(1-\frac{1}{e}\right)\approx 0{,}63KE_0\approx 0{,}63\Delta s(+\infty)$;
- la pente à l'origine est $\left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0^+}=KE_0\frac{1}{\tau}e^{(-0/\tau)}=\frac{KE_0}{\tau}$. La droite tangente à l'origine a donc pour équation: $y(t)=(KE_0/\tau)t$, d'où $y(t)=K\cdot E_0$ pour $t=\tau$;
- Cette propriété est vérifiée en tout point de la courbe : si $y(t)=s'(t_1)\left(t-t_1\right)+s(t_1)$, droite tangente à la courbe en t_1, alors $y(t_1+\tau)=K\cdot E_0$;
- soit t_r tel que $s(t_r)=0{,}95\cdot s(+\infty)\cdot t_r$ vérifie $KE_0\left(1-e^{-t_r/\tau}\right)=0{,}95\cdot KE_0$, d'où $e^{-t_r/\tau}=0{,}05\Rightarrow t_r=-\tau\cdot\ln(0{,}05)\approx 3\cdot\tau$.

Identifier les paramètres d'un modèle du premier ordre

Conditions pour que la réponse à un échelon s'apparente à celle d'un premier ordre :

- existence valeur finale ;
- pas de dépassement ;
- pente à l'origine pouvant être non nulle ;
- pas de point d'inflexion.

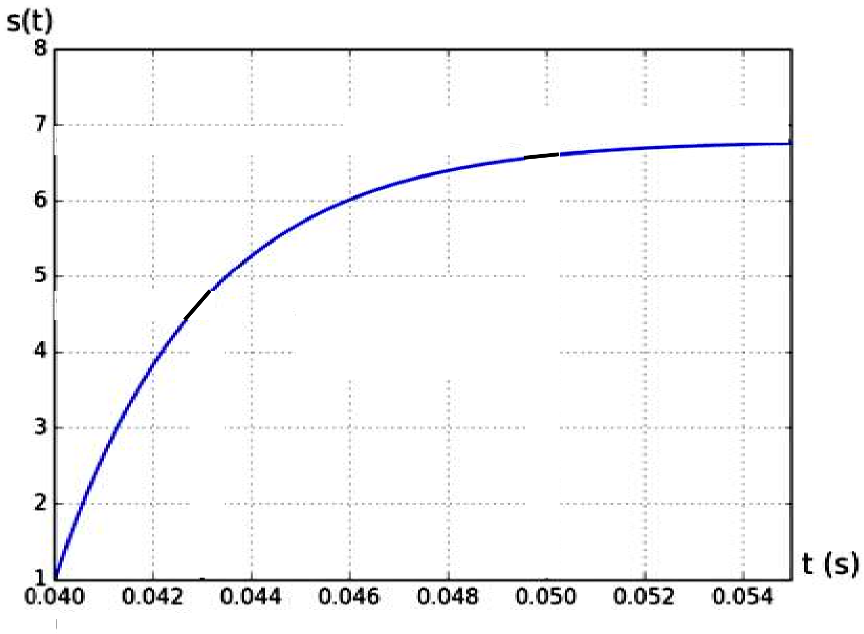
Les paramètres du modèle du premier ordre sont identifiés ainsi :

- K à partir de la variation finale et de la relation $\Delta s(+\infty)=KE_0$.
- τ à partir de la durée de réponse pour une variation de 63%.

Exemple : à partir de la réponse expérimentale à un échelon d'amplitude 2, identifier les paramètres du système modélisé par un premier ordre.

Q1 - Identifier la valeur de K :

Q2 - Identifier la valeur de τ



Q3 - En déduire la fonction de transfert du premier ordre :

Comportement, performances et identification d'un modèle du deuxième ordre

Comportement temporel, performances d'un modèle du 2ème ordre : $\dfrac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}.p+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$

Fonction de transfert

La fonction de transfert correspond à une équation différentielle de degré 2 écrite sous la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=Ke(t) \text{ pour } t>0$$

La fonction de transfert d'un système du deuxième ordre, sous l'hypothèse des conditions initiales nulles, s'écrit :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad \omega_0>0, z>0$$

avec ω_0, pulsation propre (rad/s)

z (noté parfois m ou ξ), facteur ou coefficient d'amortissement (sans unité)

K, gain statique, unité $= \dfrac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$

Comme pour l'équation du premier degré, la solution de l'équation différentielle du second degré est un résultat classique démontré en physique et mathématiques. La recherche de la solution conduit à déterminer les racines d'une équation du second degré de discriminant $\Delta=4\omega_0^2(z^2-1)$ donnant des réponses différentes suivant la valeur du facteur d'amortissement z. Si $z\geq1$ les racines sont réelles, complexes sinon. Les équations temporelles sont données pour information.

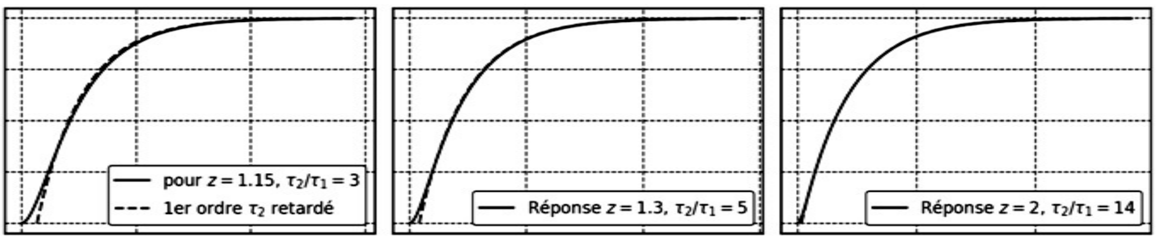
Forme générale des réponses non oscillatoires: $z\geq1$

Si **z**>**1**, un second ordre s'écrit aussi comme un produit de **2** premiers ordres:

$$\boxed{H(p)=\frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \text{ avec } \tau_1+\tau_2=\frac{2z}{\omega_0} \text{ et } \tau_1\tau_2=\frac{1}{\omega_0^2}}$$

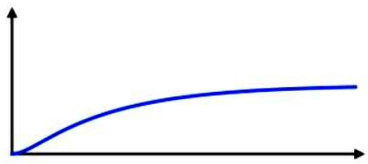
Si z>1,1 et après les instants initiaux, la réponse est proche de celle d'un premier ordre de constante de temps τ_2 retardée de τ_1, en supposant que $\tau_2 > \tau_1$

Exemples de réponse :

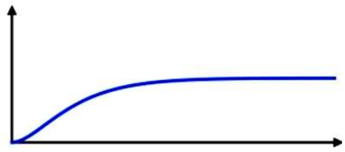


Les équations des réponses temporelles sont :

Si z>1: $s(t)=KE_0\left[1+\frac{1}{\tau_2-\tau_1}\left(\tau_1 e^{-t/\tau_1}-\tau_2 e^{-t/\tau_2}\right)\right]$ pour t≥0



Si z=1:$s(t)=KE_0\left(1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ pour t≥0



avec $\tau=\frac{1}{\omega_0}$

Forme générale des réponses oscillatoires amorties: z<1

Si z<1, la réponse temporelle a pour équation :

$s(t)=KE_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-\omega_0 zt}\sin(\omega_a t+\varphi)\right)$ pour t≥0, avec $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$ et $\omega_a=\omega_0\sqrt{1-z^2}$

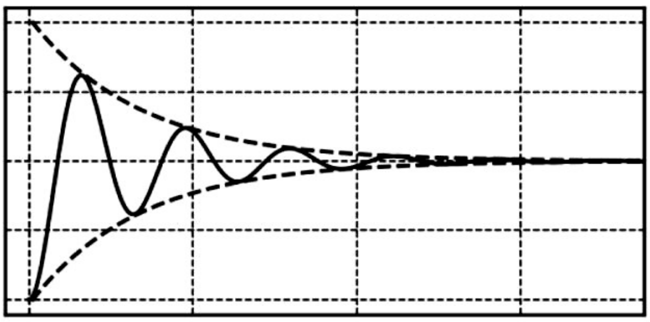
$$D_{k\%}=e^{\frac{-z.k\cdot\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

On utilise un abaque qui nous donne la valeur du temps de réponse réduit ($=tr_{5\%}\cdot\omega_0$) en fonction du facteur d'amortissement.

La forme générale d'une réponse oscillatoire amortie est une sinusoïde, de pulsation amortie $\omega_a=\omega_0\sqrt{1-z^2}$, centrée sur la valeur finale et comprise entre 2 exponentielles.

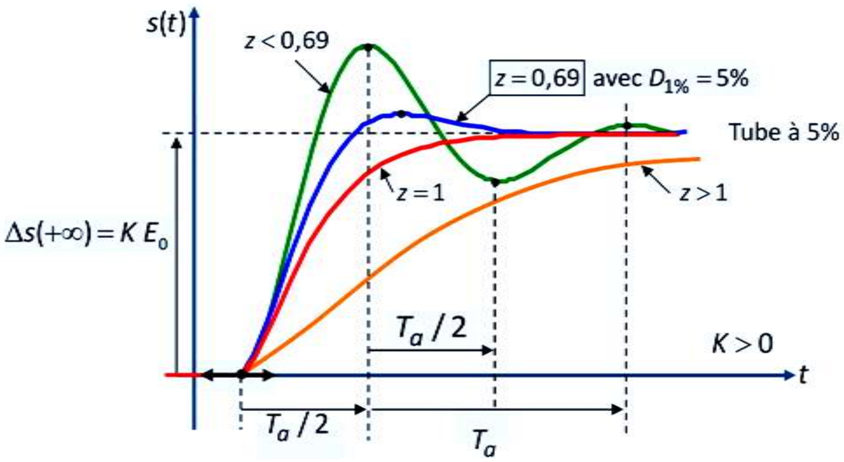
La pseudo-période est la durée entre deux extrémums de même sens: $T_a=\frac{2\pi}{\omega_a}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$

Exemple de réponse pour z=0,15 :



Caractéristiques de la réponse temporelle

La réponse d'un deuxième ordre à un échelon d'amplitude E_0 a les propriétés suivantes:



Variation totale : $\Delta s(+\infty) = K\,E_0$

Pente à l'origine nulle

Pas de dépassement pour **z ≥ 1. Dépassements** en nombre infini pour **z<1**

Pour ***z* ≈ 0,7 : un seul** dépassement >1% qui vaut **5%** et **temps de réponse minimal.**

La valeur du ki^{ème} dépassement relatif est donnée par l'abaque en annexe.

Le temps de réponse réduit $tr_{5\%} \cdot \omega_0$, sans unité, ne dépend que du facteur d'amortissement z:

- lorsque z=0,7,$t_{5\%} \cdot \omega_0 \approx 3$;
- lorsque z=1,$tr_{5\%} \cdot \omega_0 \approx 5$;

L'abaque montre qu'à un facteur d'amortissement correspond un temps de réponse réduit.

Par conséquent, pour un même facteur z, plus ω_0 augmente, plus $t_{r5\%}$ diminue et donc plus le système est rapide.

Application : utilisation des **abaques** pour une réponse à un échelon d'un système du 2ème ordre.

Q1 - Pour z=0,3, que valent les dépassements relatifs supérieurs à 1%.

Q2 - Pour quelles valeurs de z les dépassements relatifs sont inférieurs à 1% ?

Q3 - Sur une réponse à un échelon obtenue expérimentalement, on relève un premier dépassement relatif de 25%. Quel est le facteur d'amortissement si le système est modélisé par un 2ème ordre ?

Q4 - Que vaut le temps de réponse réduit pour ce facteur d'amortissement? Indiquer approximativement le point d'entrée dans le tube.

Identifier les paramètres d'un modèle du deuxième ordre

Condition pour assimiler le modèle à un $2^{ème}$ ordre

Conditions pour que la réponse à un échelon s'apparente à celle d'un deuxième ordre :

- existence valeur finale ;
- pente à l'origine pouvant être nulle;
- un point d'inflexion sur la montée initiale ;
- avec réponse oscillatoire amorti ($z<1$), s'il existe des dépassements;
- avec réponse non oscillatoire ($z \geq 1$), sinon.

Identification des paramètres pour une réponse oscillatoire amortie

Pour un modèle du deuxième ordre avec dépassements, sont identifiés :

- **K** à partir de la variation totale et de la relation $\Delta s(+\infty)=KE_0$;
- z à partir du premier dépassement $D_{1\%}$. Abaque ou $z=\sqrt{\frac{(\ln D_{1\%})^2}{\pi^2+(\ln D_{1\%})^2}}$
- ω_0 à partir de la durée entre deux extrémums. On en déduit la pseudo période T_a puis ω_0 par la relation $\omega_a=\omega_0\sqrt{1-z^2}$.

Identification des paramètres pour une réponse non oscillatoire

Pour un modèle du deuxième ordre sans dépassement, on suppose la courbe assimilable à un premier ordre de constante de temps τ_2 ayant un retard τ_1; hypothèse valable si τ_2/τ_1>**3** (à vérifier). Les caractéristiques sont alors déterminées ainsi :

- **K** à partir de la variation totale ;
- τ_2 à partir de l'intersection d'une droite tangente à la courbe avec l'asymptote horizontale ;
- τ_1 à partir de la durée de réponse à 63% correspondant à une durée $\tau_1+\tau_2$.
- z et ω_0 sont déterminés par identification : $\frac{1}{\omega_0^2}=\tau_1\tau_2$ et $\frac{2z}{\omega_0}=\tau_1+\tau_2$.

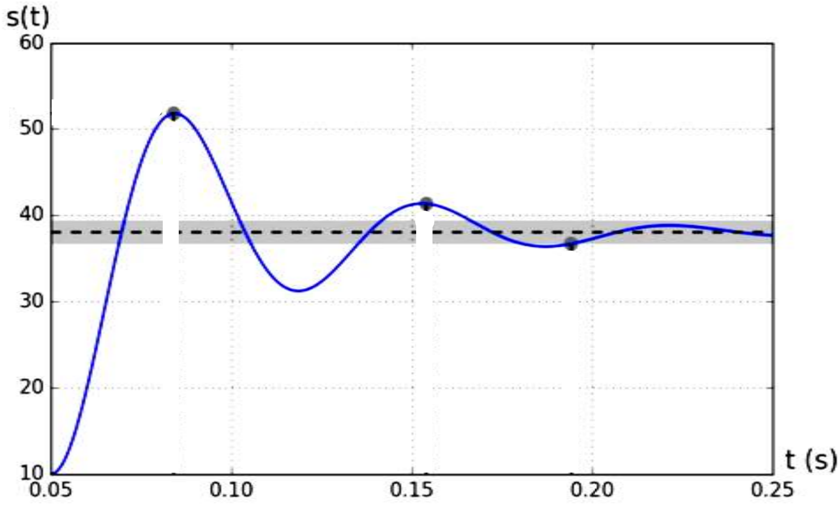
Exemple d'identification à partir d'une réponse oscillatoire amortie : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue. Sa réponse expérimentale à un échelon d'amplitude $E_0=2$ est donnée ci-dessous.

La réponse s'apparente à la réponse d'un système du $2^{ème}$ ordre oscillatoire amortie : asymptote horizontale, dépassements d'amplitudes décroissantes, tangente à l'origine nulle et point d'inflexion.

Ces observations permettent de proposer comme fonction de transfert du modèle de comportement du système :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \text{ avec } z<1$$

Les trois paramètres à identifier sont: le gain statique **K**, le facteur d'amortissement **z** et la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$.



Q1 - Identifier la valeur de K

Q2 - Identifier la valeur de z

Q3 - Déterminer la pulsation amortie puis ω_0

Q4 - En déduire une fonction de transfert représentative du comportement du système

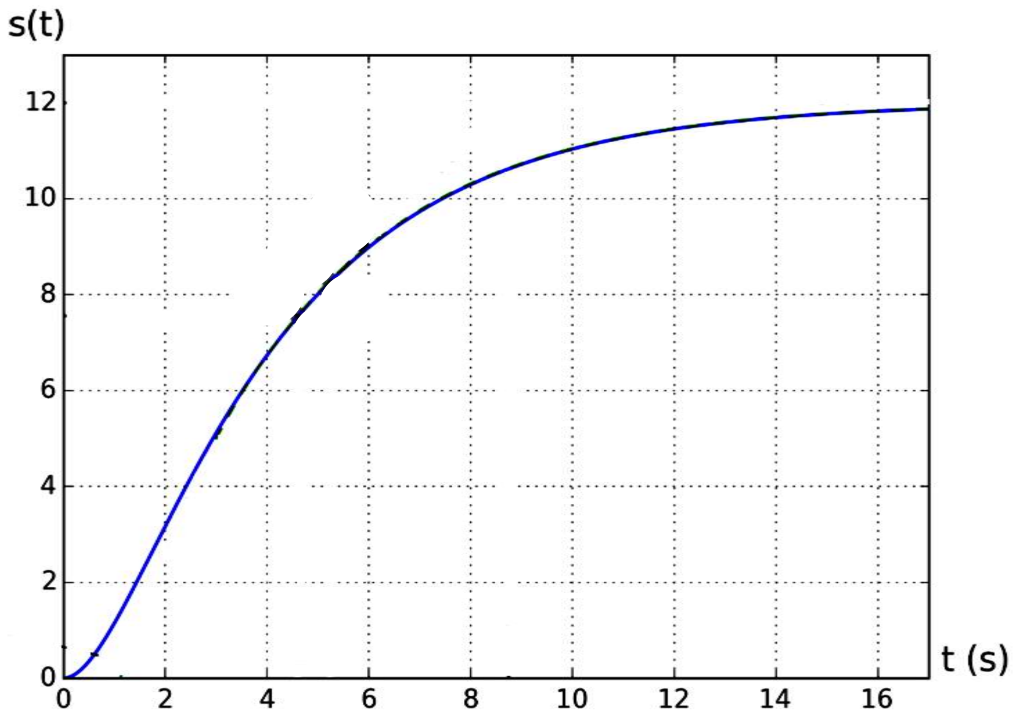
Exemple d'identification à partir d'une réponse non oscillatoire : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue. Sa réponse expérimentale à un échelon d'amplitude $E_0=2$ est donnée ci-dessous.

Elle s'apparente à la réponse d'un système du $2^{ème}$ ordre non oscillatoire : asymptote horizontale mais pas de dépassement, pente à l'origine nulle et un seul point d'inflexion.

Le modèle de comportement proposé a pour fonction de transfert : $H(p)=\frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$.

Les trois paramètres à identifier sont: le gain statique **K** et les deux constantes de temps $\boldsymbol{\tau_1}$ et $\boldsymbol{\tau_2}$.

Q5 - Déterminer les constantes de temps.



Q6 - Déterminer la fonction de transfert et les caractéristiques de la fonction

Abaques

$$z=\sqrt{\frac{(\ln D_{1\%})^2}{(\ln D_{1\%})^2+\pi^2}}$$

$$D_{k\%}=e^{\frac{-z\cdot k\cdot \pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$