

## TD 1 : FONCTION DE TRANSFERT D'UN SLCI, STABILITE ET VALEUR FINALE

### Exercice 1.1 : DETERMINER UNE FONCTION DE TRANSFERT SOUS FORME CANONIQUE

Q1: Déterminer sous forme canonique, les fonctions de transfert des systèmes modélisés par les équations différentielles ci-dessous. En déduire pour chacune le gain statique, la classe et l'ordre. Indiquer si le modèle est stable. Définir les conditions initiales de la réponse à l'instant  $t_0=0$ .

a.  $7 \frac{ds(t)}{dt} + 3s(t) = 5e(t)$

b.  $s(t) = 8e(t)$

c.  $5 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 4 \frac{ds(t)}{dt} + 7s(t) = 3 \frac{de(t)}{dt} + 2e(t)$

d.  $M \frac{d^2s(t)}{dt^2} = -f \frac{ds(t)}{dt} + ie(t)$

e.  $\frac{d^3s(t)}{dt^3} + 7 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 12 \frac{ds(t)}{dt} + 90s(t) = 2 \frac{d^2e(t)}{dt^2} + 5 \frac{de(t)}{dt}$

Q2 : Si cela est possible, déterminer la variation finale de la réponse à un échelon d'amplitude  $E_0$ .

### Exercice 1.2 : FOUR ELECTRIQUE

La modélisation (équation thermique) d'un four thermique est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 6\alpha \frac{d\theta(t)}{dt} + 4\alpha^2\theta(t) = Ku(t)$$

avec:  $u(t)$  tension d'alimentation de la résistance  $\theta(t)$  température du four et  $K$  constantes réelles, positive pour  $K$ . On suppose les conditions de Heaviside.

Q1: Déterminer la fonction de transfert  $H(p)$  du système sous forme canonique. Sous quelle condition le modèle est-il stable ?

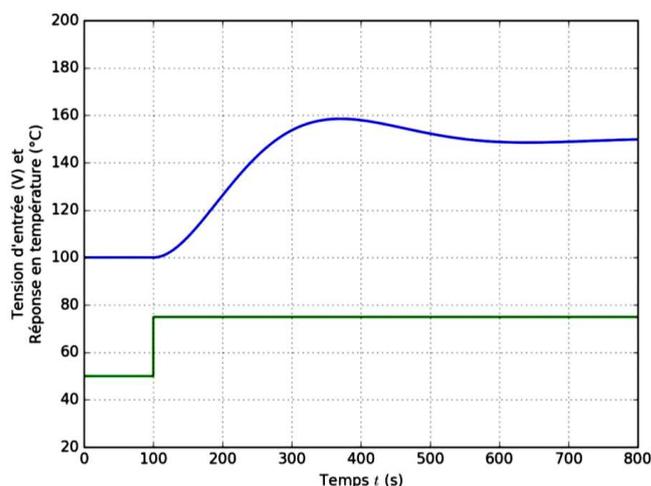
Q2 : Sachant que  $u(t)$  est un échelon d'amplitude  $U_0$ , donner l'expression de  $u(t)$  puis  $U(p)$ .

Q3: En déduire  $\Theta(p)$  en fonction des constantes  $\alpha$ ,  $K$  et  $U_0$ .

Q4 : Déterminer la variation finale de la réponse si elle existe.

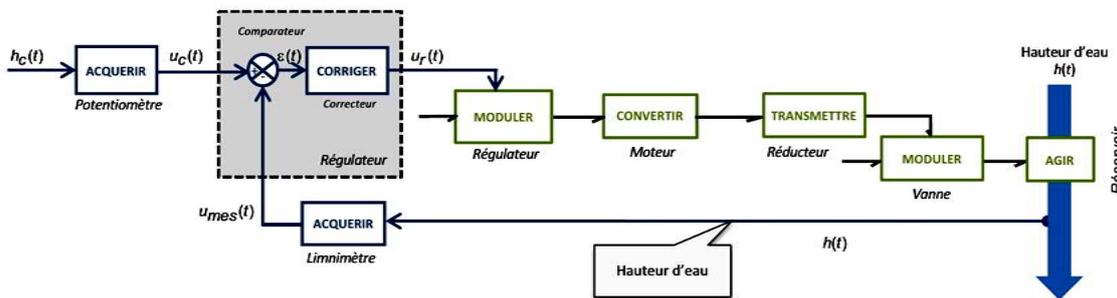
Soit la situation suivante : pour une tension d'alimentation de la résistance du four de 50 V , la température est stabilisée à 100°C. La tension d'alimentation passe 75 V à l'instant  $t=100$  s. Le relevé de la température est donné ci-dessus.

Q5: Identifier  $\Delta\theta(+\infty)$  sur le graphique et en déduire une condition, fonction de  $U_0, K$  et  $\alpha$ , devant être vérifiée pour que le modèle corresponde aux résultats expérimentaux.



**Exercice 1.3 : SYSTEME RAMSES**

Le système RAMSES est un système anti-inondations performant. Il comprend un bassin enterré d'une contenance de 10000 m<sup>3</sup> dont le niveau d'eau est asservi suivant la structure fonctionnelle ci-dessous :



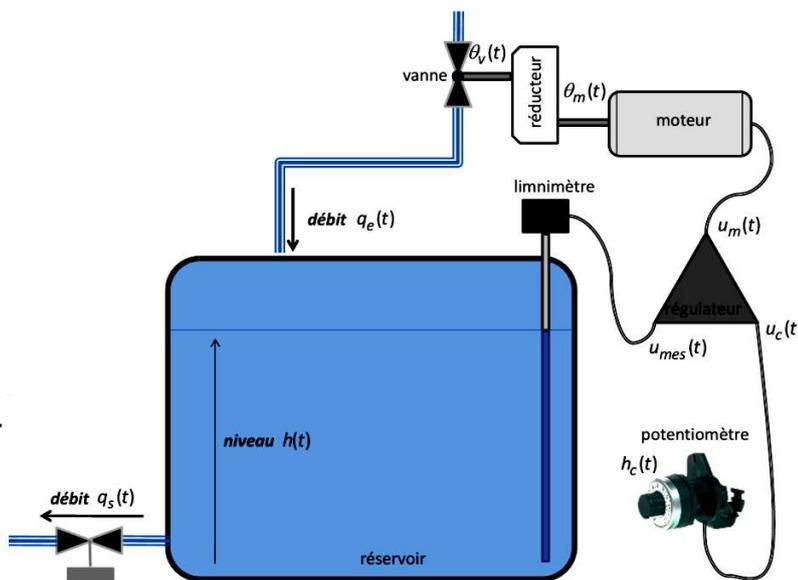
On s'intéresse à la modélisation de la chaîne de puissance et à une situation dans laquelle le réservoir est fermé en sortie.

Les variables utiles, représentées sur le schéma ci-contre sont :

- la tension de commande du régulateur  $u_r(t)$ ;
- la tension d'alimentation du moteur  $u_m(t)$ ;
- la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  de l'arbre du moteur ;
- la vitesse de rotation  $\omega_v(t)$  et la position  $\theta_v(t)$  de l'arbre de sortie du réducteur :  $\omega_v(t) = \frac{d\theta_v(t)}{dt}$
- le débit entrant  $q_e(t)$  dans le réservoir;
- la hauteur d'eau  $h(t)$  dans le réservoir.

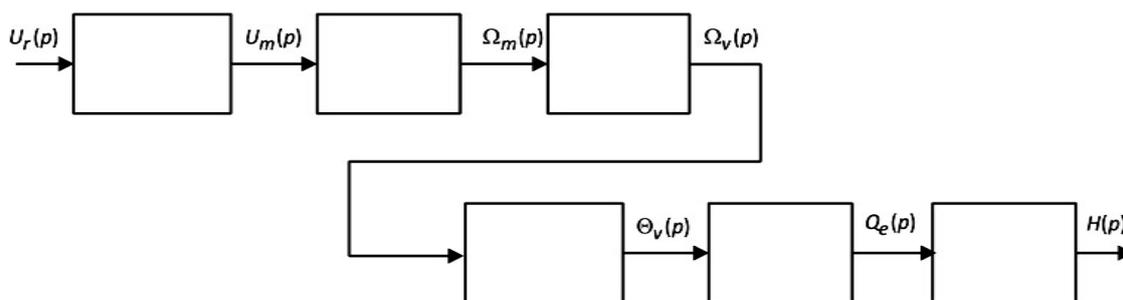
Les modèles de connaissance des différents composants sont définis ainsi :

- régulateur:  $u_m(t) = K_r u_r(t)$
- moteur:  $\tau \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m \cdot u_m(t)$
- réducteur de rapport de transmission  $r(r > 1)$
- vanne :  $q_e(t) = K_v \theta_v(t)$  avec  $\omega_v(t) = \frac{d\theta_v(t)}{dt}$
- réservoir fermé :  $q_e(t) = s \frac{dh(t)}{dt}$



On suppose les conditions de Heaviside vérifiées.

Q1: Déterminer les fonctions de transfert des différents blocs et compléter le schéma ci-dessous en indiquant, dans chaque bloc, la fonction de transfert associée.



Q2 : Déterminer la fonction de transfert  $\frac{H(p)}{U_r(p)}$  sous forme canonique. Indiquer le gain, l'ordre et la classe. Le modèle est-il stable ?

## TD 2 : IDENTIFIER UN MODELE DE COMPORTEMENT DU PREMIER ORDRE

## Exercice 2.1 : MOTEUR D'UN SYSTEME D'HEMODIALYSE



Le rôle d'un rein est de séparer les toxines du sang, afin de les éliminer.

En cas d'insuffisance rénale, il faut donc purifier le sang par d'autres moyens, tels que l'hémodialyse ou la transplantation rénale.

Dans le cas de l'hémodialyse, un traitement extracorporel du sang est réalisé à l'aide d'un rein artificiel appelé dialyseur.

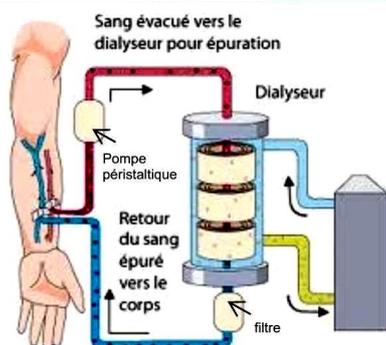
Dans le dialyseur circule deux circuits séparés par une membrane poreuse (voir schéma ci-dessous).

L'un d'entre eux est parcouru par le sang, et l'autre est parcouru à contrecourant par le dialysat (liquide de dialyse).

Dans le circuit « sang » extracorporel, le sang est acheminé vers le dialyseur grâce à une pompe péristaltique (objet de notre étude).

On recherche un modèle de l'ensemble constitué du hacheur (pré-actionneur) et du moteur entraînant la pompe péristaltique. Pour cet ensemble, l'entrée est une commande numérique  $c(t)$  et la sortie la vitesse angulaire du moteur  $\omega_m(t)$

La fonction de transfert du moteur est:  $\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1200}{100+p}$



$u_m(t)$  est la tension d'alimentation (en V) du moteur et  $\omega_m(t)$  la vitesse angulaire de l'axe du moteur (en rad/s).

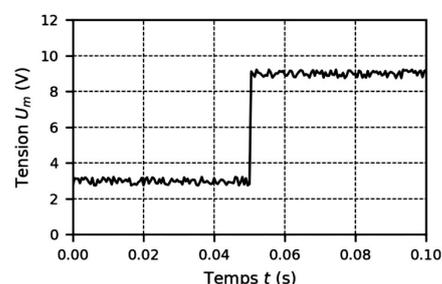
Q1: Déterminer les performances en stabilité et rapidité de ce système.

Q2: Tracer en faisant apparaître les points caractéristiques, l'allure de la sortie  $\omega_m(t)$  pour une entrée en échelon d'amplitude  $U_0=7$  V.

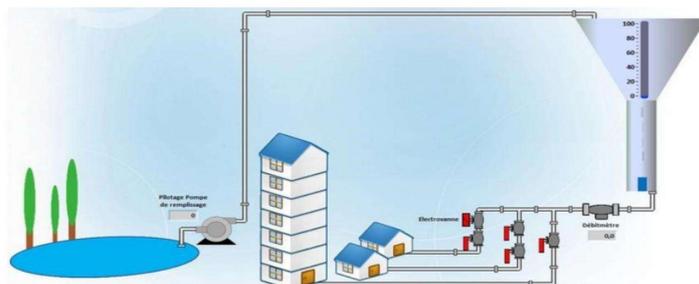
Remarque : pour répondre à cette question, il n'est pas demandé de déterminer  $\omega_m(t)$ .

Les caractéristiques du hacheur n'étant pas connues, l'expérience suivante est réalisée: la commande du hacheur,  $c(t)$ , valeur numérique entière comprise entre -1024 et 1023, passe de 256 à 768 à l'instant  $t=0.05$  s. La tension d'alimentation du moteur, qui est la grandeur de sortie du hacheur, est mesurée et tracée figure ci-contre.

Q3 : Déterminer un modèle de comportement du hacheur  $\frac{U_m(p)}{C(p)}$ . En déduire la fonction de transfert  $\frac{\Omega_m(p)}{C(p)}$ .



## Exercice 2.2 : ASSERVISSEMENT D'UN NIVEAU D'EAU



Considérons un dispositif expérimental représentatif d'un réservoir d'eau asservi en hauteur d'eau.

La structure fonctionnelle du système est représentée ci-dessous, du point de vue de l'unité de commande.

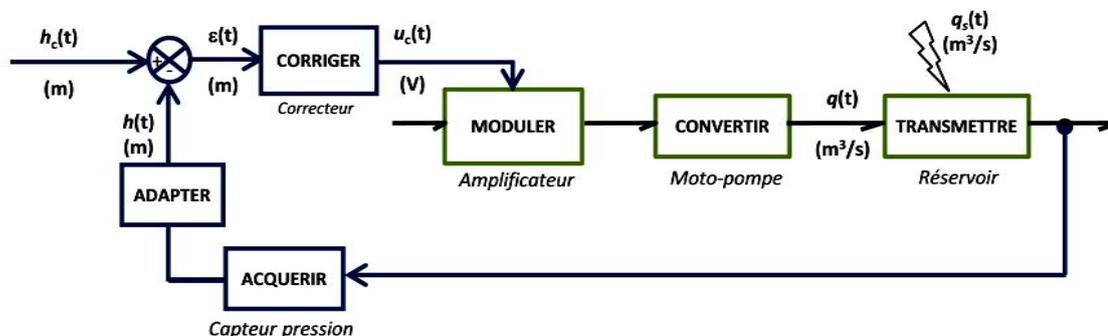
La chaîne de puissance comprend :

- un amplificateur et un groupe moto-pompe (moteur électrique associé à une pompe hydraulique). L'ensemble fournit un débit  $q(t)$  ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) proportionnel à la commande  $u_c(t)$ :  $q(t) = K_p u_c(t)$
- un réservoir d'eau de section  $S$  alimenté par le débit  $q(t)$  et se vidant simultanément avec un débit  $q_s(t)$ . Le comportement est caractérisé par l'équation :  $q(t) - q_s(t) = S \frac{dh(t)}{dt}$ .



Le capteur utilisé est un capteur de pression dont la grandeur de sortie est adaptée pour donner une image de la hauteur d'eau en mètre.

L'IHM (un ordinateur) n'est pas modélisé. La consigne est notée  $h_c(t)$  en mètre.



Le correcteur est un correcteur à action proportionnelle de gain  $K_c$ .

Les équations du modèle de connaissance sont

$$(1) \varepsilon(t) = h_c(t) - h(t)$$

$$(2) u_c(t) = K_c \varepsilon(t)$$

$$(3) q(t) = K_p u_c(t)$$

$$(4) q(t) - q_s(t) = S \frac{dh(t)}{dt}$$

En combinant ces équations, on obtient l'équation différentielle du système :  $\frac{S}{K_p K_c} \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = h_c(t) - \frac{1}{K_p K_c} q_s(t)$

On remarque que le terme de gauche correspond à la réponse du système et le terme de droite aux entrées:  $h_c(t)$  la consigne et  $q_s(t)$  la perturbation.

Démonstration :

en combinant les équations (1) et (2) on obtient:  $u_c(t) = K_c h_c(t) - K_c h(t)$

et les équations (3) et (4) donnent:  $u_c(t) = \frac{1}{K_p} q(t) = \frac{1}{K_p} \left( S \frac{dh(t)}{dt} + q_s(t) \right) = \frac{S}{K_p} \frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{K_p} q_s(t)$

d'où l'équation associée au système :  $K_c h_c(t) - K_c h(t) = \frac{S}{K_p} \frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{K_p} q_s(t) \Leftrightarrow \frac{S}{K_p} \frac{dh(t)}{dt} + K_c h(t) = K_c h_c(t) - \frac{1}{K_p} q_s(t)$

Q1: Exprimer l'équation différentielle (5) dans le domaine de Laplace et en déduire les fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  associées aux comportements en poursuite et en régulation, sous forme canonique.

Q2 : Déterminer les performances de stabilité des fonctions de transfert en poursuite et régulation.

Le réservoir est un cylindre de diamètre  $d=100$  mm.  $S$  est l'aire de la section du cylindre ( $m^2$ ).

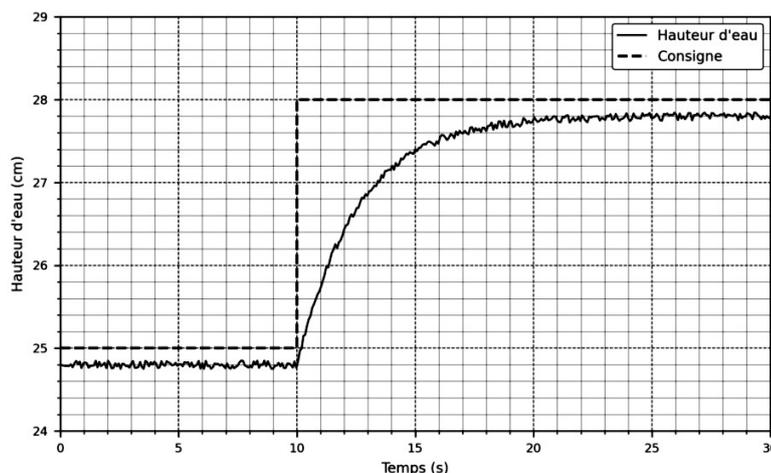
La mesure ci-dessous est réalisée avec un correcteur  $K_c=600$  V/m. Le débit de sortie,  $q_s(t)$ , est supposé constant.

Q3 : À partir de l'analyse de la réponse expérimentale, identifier le gain  $K_p$  de l'ensemble amplificateur-moto-pompe.

On considère les situations suivantes : la hauteur d'eau étant stabilisée,

1. on fait varier brusquement la consigne  $h_c(t)$  d'une amplitude  $h_0$  à un instant noté  $t_1$
2. puis, après stabilisation, on augmente brusquement le débit de sortie  $q_s(t)$  d'une amplitude  $q_0$  à un instant  $t_2$ .

Q4: Déterminer la variation de hauteur d'eau  $\Delta h_1$  induite par la variation de consigne, puis  $\Delta h_2$  induite par la variation de débit. Déterminer la variation totale  $\Delta h_t$  de hauteur d'eau après les deux manipulations.



Q5 : En déduire les performances de précision en poursuite (erreur statique) et en régulation (erreur de régulation).

On suppose obtenue l'expression suivante:  $H(p) = \frac{1}{1+2,5p} H_c(p) + \frac{-318}{1+2,5p} Q_s(p)$ .

Q6: Déterminer les valeurs numériques de  $\Delta h_1, \Delta h_2$  et  $\Delta h_t$  pour  $h_0=-3$  cm et  $q_0=2$  litre /mn. Tracer l'évolution approchée de  $h(t)$ (cm) en prenant  $t_1=20$  s et  $t_2=35$  s avec une hauteur d'eau initialement stabilisée à 20 cm .

**Exercice 2.3 : POSITIONNEMENT LINEAIRE D'UN ROBOT**

Le test, avant réglage de la commande, d'un axe linéaire de robot donne la tracé ci-dessous.

La réponse est la position  $x(t)$  du chariot sur l'axe linéaire.

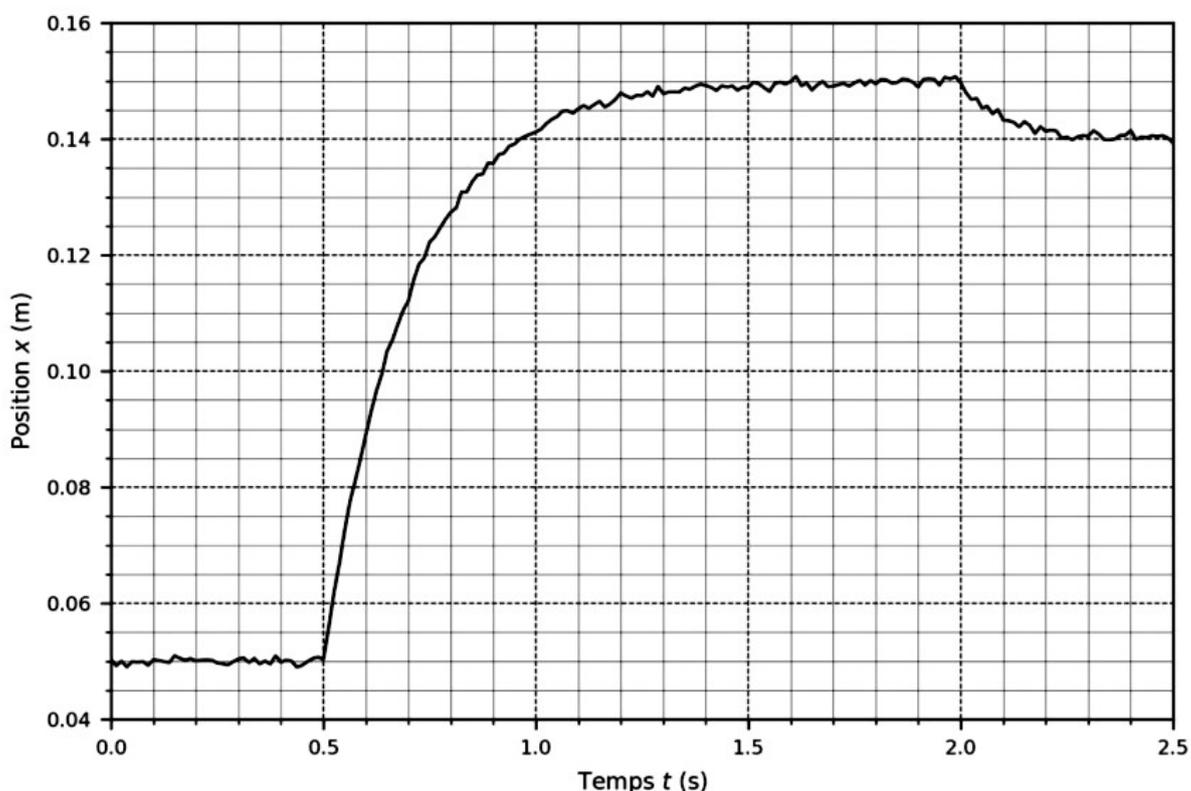
Le test est réalisé en 2 phases. Dans la première, un échelon de consigne  $x_c(t)$  d'amplitude 10 cm est appliqué. Il débute à l'instant  $t=0,5$  s.

Dans la deuxième, une force de 200 N, orientée suivant la direction de l'axe linéaire, est appliquée et maintenue à partir de l'instant  $t=2$  s. Cette phase correspond à un échelon de perturbation  $f(t)$ .

Q1: Proposer un modèle de comportement en poursuite de l'axe  $H_1(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} \Big|_{F(p)=0}$ .

Q2: Proposer un modèle de comportement en régulation de l'axe  $H_2(p) = \frac{X(p)}{F(p)} \Big|_{X_c(p)=0}$ .

Q3: Définir la position  $X(p)$  et fonction de  $X_c(p)$  et  $F(p)$ .



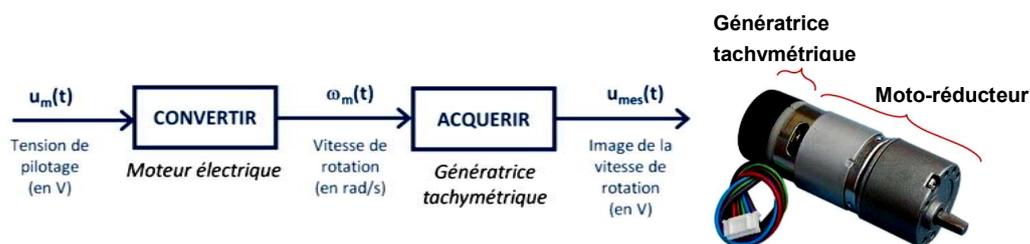
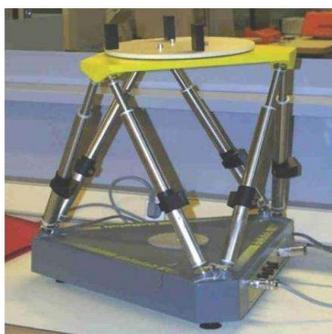
## Exercice 2.4 : CAPTEUR DE VITESSE DE LA PLATE-FORME 6 AXES



Les plates-formes mobiles, qui font partie des robots dits « parallèles », sont des systèmes constitués d'un plateau mis en mouvement par 6 vérins électriques ou hydrauliques.

Elles sont principalement utilisées dans le domaine aéronautique pour réaliser des simulateurs de vol d'avions ou d'engins spatiaux.

On s'intéresse au système constitué du moteur et du capteur de vitesse (génératrice tachymétrique), d'un axe de la plate-forme du laboratoire.



Le moteur est modélisé par la fonction de transfert :  $\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{131}{50+p}$

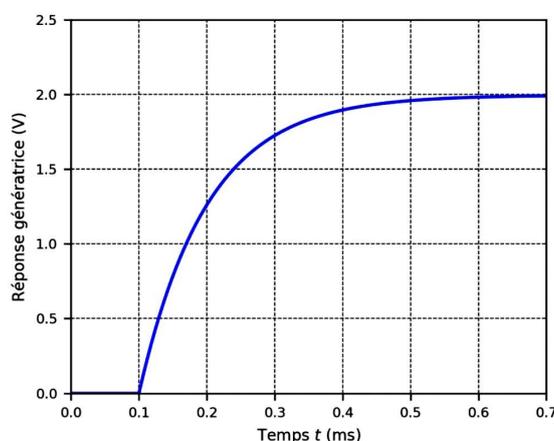
Q1 : Déterminer les performances de stabilité et rapidité du moteur.

Lorsque le moteur tourne à vitesse constante (10,5 rad/s), on ferme un interrupteur situé à l'entrée du capteur de vitesse. On soumet ainsi le capteur à un échelon de consigne d'amplitude 10,5 rad/s. L'enregistrement de la réponse du capteur en tension est donné ci-contre.

Q2 : Indiquer l'ordre du système auquel le capteur peut être identifié. Justifier.

Q3 : Déterminer ses paramètres caractéristiques ainsi que sa fonction de transfert.

Q4 : Après avoir comparé les constantes de temps du moteur et du capteur, justifier que le capteur puisse être assimilé à un gain pur.



Q5 : En déduire la fonction de transfert de l'ensemble moteur + capteur.

Q6 : En utilisant le modèle ainsi défini, tracer les tensions d'entrée et de réponse pour une entrée définie ainsi :

- à  $t=0,1$  s, échelon de tension de 6 V ;
- à  $t=0,2$  s, échelon de tension de -3 V . La tension finale est donc de 3V.

**TD 3 : IDENTIFIER UN MODELE DE COMPORTEMENT DU DEUXIEME ORDRE****Exercice 3.1 : CAMERA**

La camera PTZ est une caméra étanche, dotée d'un socle aimanté permettant de la positionner sur un véhicule.



Elle est asservie en position angulaire à l'aide de deux moteurs à courant continu.

Le comportement du moteur permettant l'orientation suivant l'axe vertical, est modélisé par la fonction de transfert :

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{9800}{10000+600p+35p^2}$$

$\theta_c(t)$  est l'angle de consigne en ° par rapport au plan horizontal ;

$\theta(t)$  est l'angle atteint.

Q1: Déterminer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert de ce système.

Q2 : En déduire, si sa réponse à un échelon est non oscillatoire ou oscillatoire amortie. Si elle est définie, indiquer la valeur de la pseudo-période notée  $T_a$ .

Q3 : Calculer le temps de réponse à 5% de ce système soumis à une entrée de type échelon.

On soumet le système à une entrée en échelon  $\theta_c(t)=20^\circ$

Q4 : Donner, dans ce cas, le nombre de dépassements d'amplitude supérieure à 1% de la réponse  $\theta(t)$ . Indiquer, pour chacun d'eux, leur valeur relative et leur valeur absolue.

Q5: Tracer l'allure de la réponse  $\theta(t)$  en précisant les points caractéristiques.

**Exercice 3.2 : REPONSE D'UN ASSERVISSEMENT ANGULAIRE**

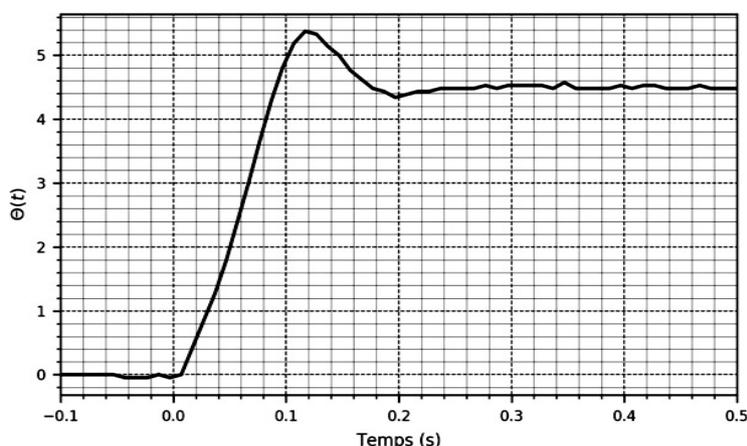
Un axe asservi en rotation d'un robot est soumis à un échelon de consigne  $\theta_c(t)$  de  $5^\circ$  à l'instant  $t=0$ .

La réponse  $\theta(t)$ , mesurée par le capteur de position angulaire de l'axe est tracée ci-après.

Q1: Déterminer les performances en poursuite de rapidité, de stabilité (pour les 2 premiers dépassements relatifs) et de précision de la réponse expérimentale.

Q2: Déterminer un modèle de comportement de cet asservissement à partir de la variation finale et du premier dépassement.

Q3 : Déterminer les performances de rapidité et stabilité et de précision du modèle de comportement en poursuite. D'où peuvent provenir les écarts constatés ?



**Exercice 3.3 : ASSERVISSEMENT EN POSITION D'UN MOTEUR**

L'asservissement en position ou en vitesse d'un moteur à courant continu est mis en œuvre dans de nombreux systèmes (volant à retour de force, robots...).

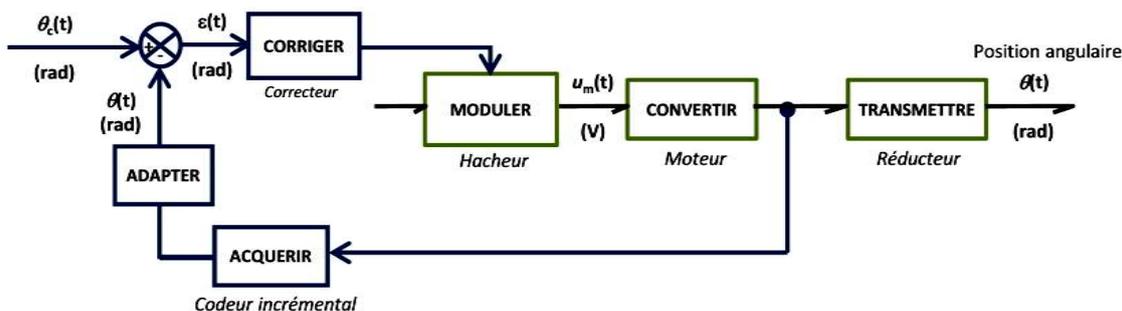


Le système étudié est une maquette permettant l'analyse de ces asservissements. Sa structure fonctionnelle est représentée ci-dessous, du point de vue de l'unité de commande.

La chaîne de puissance comprend:

- un hacheur imposant la tension d'alimentation  $u_m(t)$  du moteur ;
- un moteur associé à un réducteur.

Le capteur utilisé est un codeur incrémental à effet Hall (capteur détectant la rotation du champ magnétique d'un aimant) placé sur l'axe de rotation du moteur. L'IHM (un ordinateur) n'est pas modélisé. La consigne est notée  $\theta_c(t)$  en radian, la réponse est la position angulaire de l'axe de sortie du réducteur notée  $\theta(t)$ .



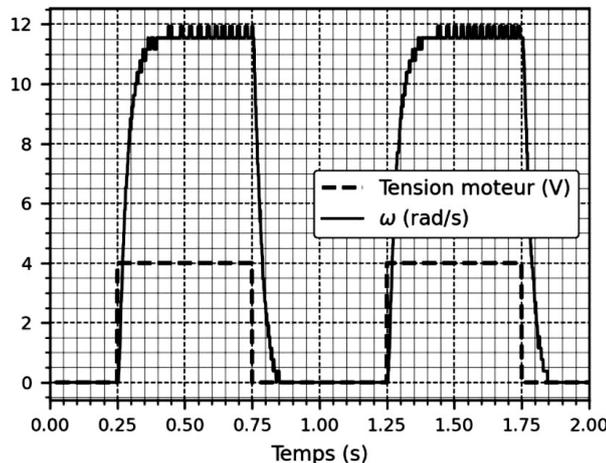
Objectif : déterminer le réglage du correcteur permettant d'obtenir l'asservissement en position le plus rapide possible au sens du temps de réponse à 5%.

**Détermination d'un modèle de comportement de la chaîne de puissance**

Un essai, dit en boucle ouverte, est réalisé afin de déterminer un modèle de comportement de la chaîne de puissance.

La tension d'alimentation du moteur est pilotée suivant une loi en rectangle. Elle impose périodiquement des échelons d'amplitudes identiques mais de signes opposés, de  $\pm 4$  V.

Les évolutions de la tension d'alimentation et de la vitesse angulaire  $\omega(t)$  en sortie de réducteur sont tracées cicontre. Un agrandissement est proposé figure 1.



Q1: En vous basant sur la figure 1, proposer un modèle de comportement pour l'ensemble moteur-réducteur. En déterminer les paramètres caractéristiques.

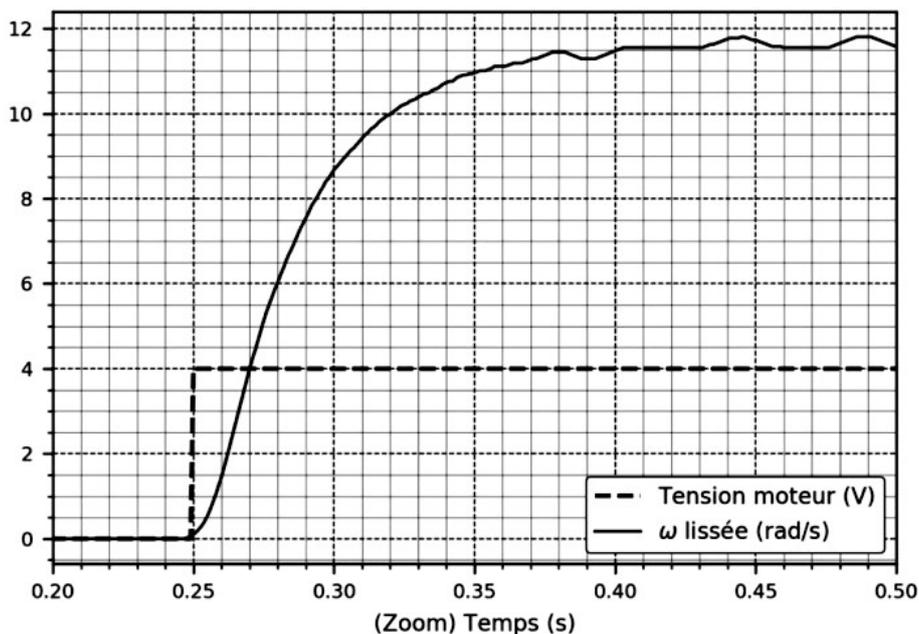
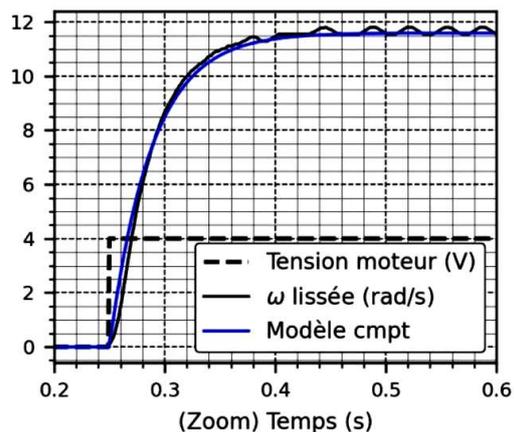


Figure 1 : essai en boucle ouverte de la chaîne de puissance (échelon de tension en entrée, vitesse angulaire en sortie)

Pour la suite du sujet, on prendra comme modèle  $H_m(p) = \frac{\Omega(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m}{1+\tau p}$ , avec  $\tau=0,038$  s et  $K_m=2,9\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}/\text{V}$ .

La figure ci-contre compare la réponse de ce modèle de comportement avec les résultats expérimentaux.

Q2 : En quoi ce modèle est-il moins pertinent que le modèle identifié précédemment.



**Performances de l'asservissement**

Le correcteur utilisé dans l'expérimentation est un correcteur à action proportionnelle de gain  $K_c$  (en  $\text{V}/\text{rad}$ ).

Les équations du modèle de connaissance sont alors :

- comparateur : (1)  $\varepsilon(t) = \theta_c(t) - \theta(t)$
- correcteur / hacheur : (2)  $u_m(t) = K_c \varepsilon(t)$
- moteur (modèle de comportement d'ordre 1) : (3)  $\tau \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = K_m u_m(t)$
- relation entre la position et la vitesse : (4)  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$

En combinant ces équations, on obtient l'équation différentielle du comportement en poursuite :

$$\tau \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{d\theta(t)}{dt} + K_m K_c \theta(t) = K_m K_c \theta_c(t)$$

Q3 : Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)}$  et les paramètres caractéristiques  $K, z$  et  $\omega_0$  en fonction de  $\tau, K_m$  et  $K_c$ .

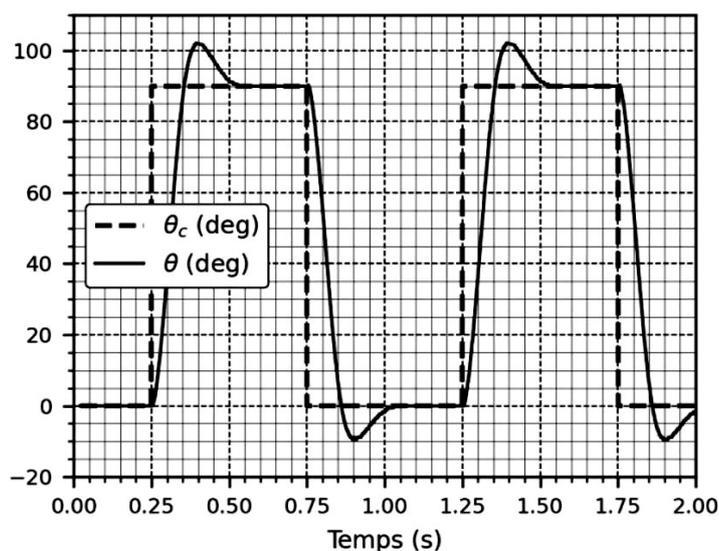
### Validation du modèle de l'asservissement

L'objectif est de comparer les résultats prédits par le modèle avec des résultats expérimentaux. Des écarts de 10% sur le temps de réponse et les valeurs extrémales de la réponse seront considérés acceptables.

Q4: Pour  $K_c=9 \text{ V/rad}$ , déterminer les valeurs numériques de  $z, \omega_0, D_{1\%}, D_{2\%}$  et  $t_{r5\%}$  prédites par le modèle de l'asservissement.

Un essai de l'asservissement en position est réalisé avec le même réglage du correcteur,  $K_c=9 \text{ V/rad}$ , et une consigne qui suit une loi en rectangle d'amplitude  $1,57 \text{ rad}$  ( $90^\circ$ ).

Les évolutions de la consigne  $\theta_c(t)$  et de la position  $\theta(t)$  de l'arbre de sortie du réducteur sont tracées ci-contre et Figure 2.



Q5: Placer sur le graphique Figure 2, les résultats de la question précédente : points de passage et tangentes connus de la réponse du modèle.

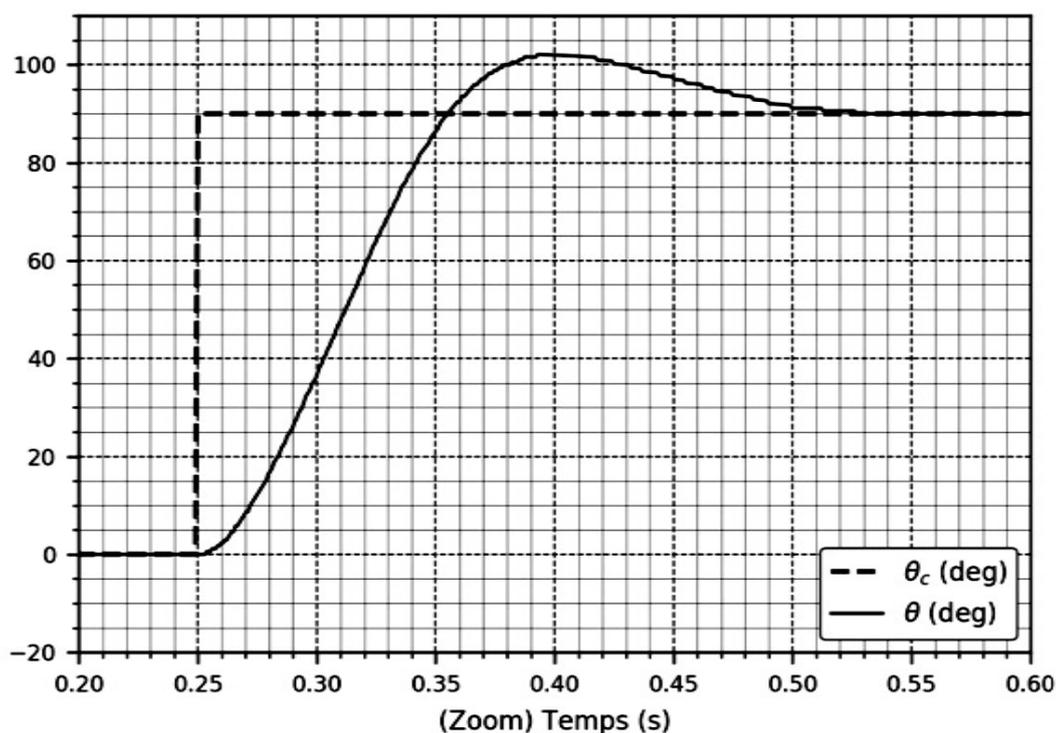


Figure 2 : essai en boucle fermée, pour  $K_c=9 \text{ V/rad}$ .

Q6: En comparant la réponse du modèle (variations finales, dépassements, temps de réponse) au résultat expérimental, déterminer si le modèle peut être considéré valide.

**Réglage du correcteur**

Q7: À partir du modèle, déterminer le gain  $K_{c1}$  du correcteur permettant d'obtenir un comportement le plus rapide possible sans dépassement.

Q8: À partir du modèle, déterminer le gain  $K_{c2}$  du correcteur permettant d'obtenir un comportement le plus rapide possible avec dépassements autorisés. Déterminer le temps de réponse à 5%.

**Exercice 3.4 : IDENTIFICATION D'UN MODELE DE COMPORTEMENT AVEC PERTURBATION**

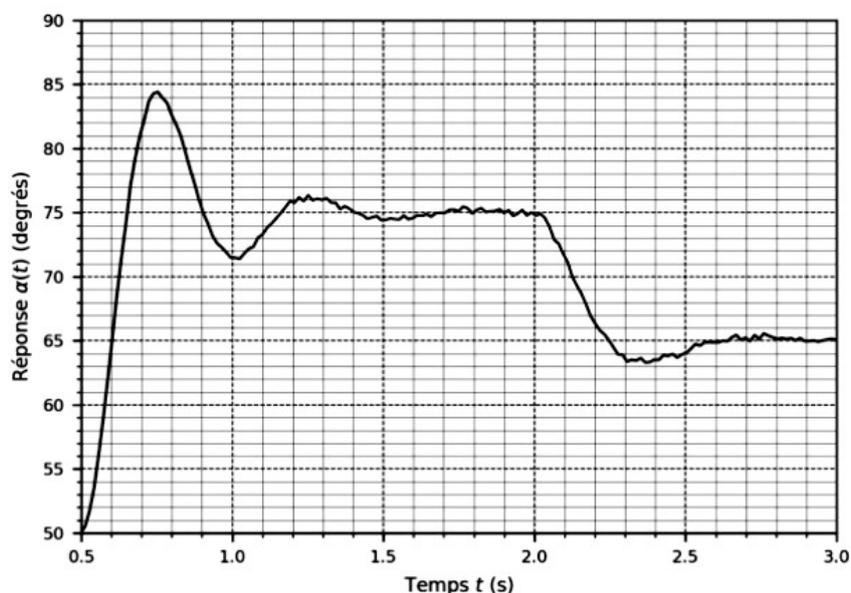
En vue d'identifier l'asservissement angulaire d'un volant haptique, on le soumet à un échelon de consigne puis à un échelon de perturbation:

- échelon de consigne  $\alpha_c(t)$  d'amplitude  $\alpha_0=30^\circ$  à l'instant  $t=0,5$  s;
- échelon de perturbation  $C(t)$  d'amplitude  $0,7$  Nm à l'instant  $t=2$  s.

La sortie  $\alpha(t)$ , mesurée expérimentalement, suit les variations définies par le graphique ci-après.

Q1: Déterminer, par identification et à partir de la réponse au premier échelon, un modèle de comportement en poursuite  $H_1(p)$ .

Q2: Déterminer, par identification et à partir de la réponse au second échelon, un modèle de comportement en régulation  $H_2(p)$ .

**Exercice 3.5 : IDENTIFICATION D'UN MODELE NON OSCILLATOIRE**

En vue d'identifier un système, on le soumet à une entrée  $e(t)$  en échelon d'amplitude 80. La sortie  $s(t)$ , mesurée expérimentalement, suit les variations définies par le graphique ci-contre.

Q1: Donner, à l'aide d'une méthode d'identification, la fonction de transfert  $H_2(p)$  du système.

Q2: Le système peut-il être assimilé à un 1<sup>er</sup> ordre?

