TD 1 : FONCTION DE TRANSFERT D'UN SLCI, STABILITE ET VALEUR FINALE

Exercice 1.1 : **DETERMINER UNE FONCTION DE TRANSFERT SOUS FORME CANONIQUE**

Q1 : Déterminer sous forme canonique, les fonctions de transfert des systèmes modélisés par les équations différentielles ci-dessous. En déduire pour chacune le gain statique, la classe et l'ordre. Indiquer si le modèle est stable. Définir les conditions initiales de la réponse à l'instant $t_0 = 0$.

a. $$7\frac{ds(t)}{dt} + 3s(t) = 5e(t) \xrightarrow{L} 7pS(p) + 3S(p) = 5E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{7p+3} \Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{7}{3}p}} \quad \begin{cases} ordre: 1 \\ classe: 0 \\ gain\ statique: \frac{5}{3} \end{cases}$$

Stable (premier ordre, coefficients du dénominateur strictement positifs)
Condition initiale pour un premier ordre : $s(0) = 0$

b. $$s(t) = K\,e(t) \xrightarrow{L} S(p) = KE(p) \Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = K} \quad \begin{cases} ordre: 0 \\ classe: 0 \\ gain\ statique: K = 8 \end{cases}$$ Stable. Pas de condition initiale.

c. $$5\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 4\frac{ds(t)}{dt} + 7s(t) = 3\frac{de(t)}{dt} + 2e(t) \xrightarrow{L} S(p)\left[5p^2 + 4p + 7\right] = E(p)\left[3p + 2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{3p+2}{5p^2+4p+7} \Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{7}\cdot\frac{1+\frac{3}{2}p}{1+\frac{4}{7}p+\frac{5}{7}p^2}} \quad \begin{cases} ordre: 2 \\ classe: 0 \\ gain\ statique: \frac{2}{7} \end{cases}$$

Stable (classe 0, deuxième ordre, coefficients du dénominateur strictement positifs)

Conditions initiales pour un deuxième ordre : $s(0) = \frac{ds}{dt}(0) = 0$.

d. $$M\frac{d^2s(t)}{dt^2} = -f\frac{ds(t)}{dt} + i\,e(t) \xrightarrow{L} S(p)\left[Mp^2 + f\,p\right] = i\,E(p)$$

$$\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{i}{Mp^2 + fp} \Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{i}{f\,p}\cdot\frac{1}{1+\frac{M}{f}p}} \quad \begin{cases} ordre: 2 \\ classe: 1 \\ gain\ statique: \frac{i}{f} \end{cases}$$

Instable (classe 1)

e. $$\frac{d^3s(t)}{dt^3} + 7\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 12\frac{d\,s(t)}{dt} + 90s(t) = 2\frac{d^2e(t)}{dt^2} + 5\frac{d\,e(t)}{dt} \xrightarrow{L} S(p)\left[p^3 + 7p^2 + 12p + 90\right] = E(p)\left[2p^2 + 5p\right]$$

$$\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p^2+5p}{p^3+7p^2+12p+90}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{90}p\frac{1+\frac{2}{5}p}{1+\frac{12}{90}p+\frac{7}{90}p^2+\frac{p^3}{90}}} \quad \begin{cases} ordre: 3 \\ classe: -1 \\ gain\ statique: \frac{1}{18} \end{cases}$$

Classe ≤0 et coefficients du dénominateur strictement positifs.
Mais la condition complémentaire $7 \times 12 > 1 \times 90$ n'est pas vérifiée. Le modèle est instable.

Q2 : Si cela est possible, déterminer la valeur finale de la réponse à un échelon d'amplitude E_0.

a. De classe 0 : $\Delta s(+\infty) = s(+\infty) = K\,E_0 = \dfrac{5}{3}E_0$

b. De classe 0, $\Delta s(+\infty) = s(+\infty) = K\,E_0 = 8\,E_0$

c. De classe 0 : $\Delta s(+\infty) = s(+\infty) = K\,E_0 = \dfrac{2}{7}E_0$

d. De classe 1, instable.

e. De classe -1 mais instable (classe -1 : aurait convergé vers 0 si le modèle avait été stable).

Exercice 1.2 : **FOUR ELECTRIQUE**

Q1 : Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ du système sous forme canonique. Sous quelle condition le modèle est-il stable ?

$$2\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 6\alpha\frac{d\theta(t)}{dt} + 4\theta^2\ s(t) = K\,u(t) \xrightarrow{L} \Theta(p)\left[2p^2 + 6\alpha\,p + 4\alpha^2\right] = K\,U(p)$$

Soit $\Theta(p) = \underbrace{\dfrac{K}{2p^2 + 6\alpha\,p + 4\alpha^2}}_{H(p)}U(p)$ d'où $H(p) = \dfrac{\Theta(p)}{U(p)} = \dfrac{K}{2p^2 + 6\alpha\,p + 4\alpha^2} = \dfrac{K}{4\alpha^2}\dfrac{1}{1 + \dfrac{3}{2\alpha}p + \dfrac{1}{2\alpha^2}p^2}$

Gain statique : $\dfrac{K}{4\alpha^2}$, classe 0 et ordre 2. Modèle stable si $\alpha > 0$.

Q2 : Sachant que $u(t)$ est un échelon d'amplitude U_0, donner l'expression de $u(t)$ puis $U(p)$.

Dans les hypothèses de Heaviside :

$$\begin{cases} u(t) = U_0 \quad pour \quad t \geq 0 \\ u(t) = 0 \quad pour \quad t < 0 \end{cases} \xrightarrow{L} \boxed{U(p) = \frac{U_0}{p}}$$

Q3 : En déduire $\Theta(p)$ en fonction des constantes α, K et U_0.

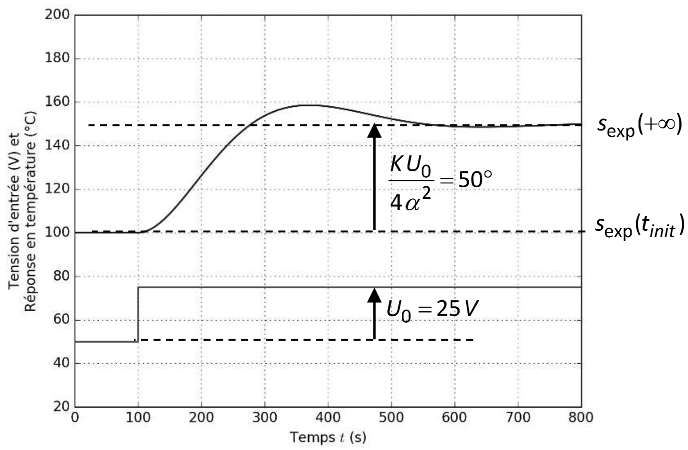
$$\boxed{\Theta(p) = \frac{K\,U_0}{(2p^2 + 6\alpha\,p + 4\alpha^2)p}}$$

Q4 : Déterminer la variation finale de cette réponse.

Le système étant de classe 0 : $\Delta\theta(+\infty) = \dfrac{K}{4\alpha^2}U_0$.

Par le théorème de la valeur finale : $\Delta\theta(+\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t) = \lim\limits_{p\to 0+} p\Theta(p) = \boxed{\dfrac{K\,U_0}{4\alpha^2}}$

Q5 : Identifier $\Delta\theta(+\infty)$ sur le graphique et en déduire une condition, fonction de U_0, K et α, devant être vérifiée pour que le modèle corresponde aux résultats expérimentaux.



Sur le graphique, on relève : $U_0 = 25$ V et $\Delta\theta(+\infty) = 50°$.

Pour que le comportement expérimental corresponde au modèle théorique, il faut que : $\Delta\theta_{exp}(+\infty) = \dfrac{K}{4\alpha^2}U_0$,

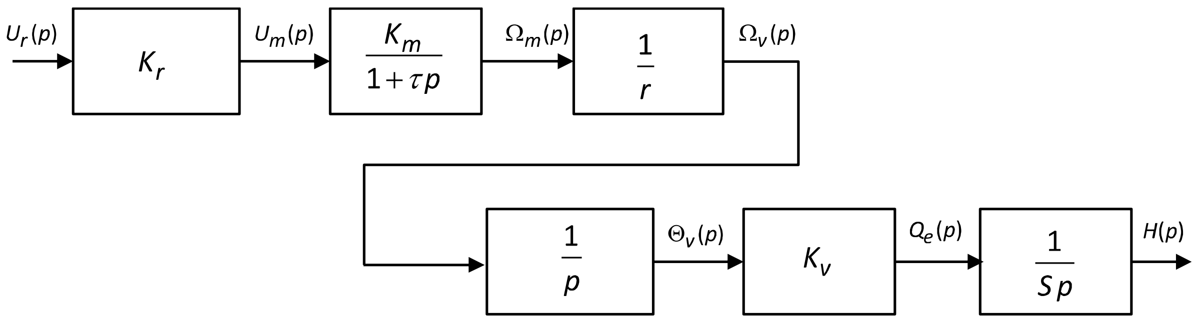
D'où la condition qui doit être vérifiée : $\dfrac{K}{4\alpha^2} = \dfrac{\Delta\theta_{exp}(+\infty)}{U_0} = \dfrac{50}{25}$ °/V.

Exercice 1.3 : **SYSTEME RAMSES**

Q1 : Déterminer les fonctions de transfert des différents blocs et compléter le schéma ci-dessous en indiquant, dans chaque bloc, la fonction de transfert associée.

En exprimant, pour chaque composant, la grandeur de sortie en fonction de la grandeur d'entrée, dans le domaine de Laplace, on obtient les relations suivantes :

- **régulateur** : $u_m(t) = K_r\ u_r(t) \xrightarrow{L} U_m(p) = K_r\ U_r(p)$
- **moteur** : $\tau.\dfrac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m.u_m(t) \xrightarrow{L} \tau\, p\Omega_m(p) + \Omega_m(p) = K_m\ U_m(p) \Rightarrow \Omega_m(p) = \dfrac{K_m}{1+\tau\, p} U_m(p)$
- **réducteur** de rapport de transmission r (r>1) : $\omega_v(t) = \dfrac{1}{r}\omega_m(t) \xrightarrow{L} \Omega_v(p) = \dfrac{1}{r}\Omega_m(p)$
- **vanne** : $q_e(t) = K_v\ \theta_v(t)$ avec $\omega_v(t) = \dfrac{d\theta_v(t)}{dt} \xrightarrow{L} Q_e(p) = K_v\ \Theta_v(p)$ et $\Omega_v(p) = p\Theta_v(p) \Leftrightarrow \Theta_v(p) = \dfrac{1}{p}\Omega_v(p)$
- **réservoir** fermé : $q_e(t) = S.\dfrac{dh(t)}{dt} \xrightarrow{L} Q_e(p) = S\,pH(p) \Leftrightarrow H(p) = \dfrac{1}{S\,p}Q_e(p)$



Q2 : Déterminer la fonction de transfert $\dfrac{H(p)}{U_r(p)}$ sous forme canonique. Indiquer le gain, l'ordre et la classe. Le modèle est-il stable ?

Les différents blocs sont en série. Pour obtenir la fonction de transfert permettant de calculer $H(p)$ en fonction de $U_r(p)$, il suffit de multiplier les blocs entre eux :

$$\frac{H(p)}{U_r(p)} = K_r \frac{K_m}{1+\tau p}\frac{1}{r}\frac{1}{p}K_v\frac{1}{S\,p} = \frac{K_r\,K_m\,K_v}{(1+\tau p)r\,S\,p^2} = \frac{K_r\,K_m\,K_v}{r\,S}\frac{1}{p^2}\frac{1}{1+\tau p},$$

fonction de transfert d'ordre 3, de classe 2 et de gain $\dfrac{K_r\,K_m\,K_v}{r\,S}$.

Le modèle n'est pas stable.

> Le modèle comprend un premier ordre stable intégré deux fois. La vitesse de rotation de la vanne tend vers une valeur finale, mais le modèle comprend 2 intégrateurs. La valeur finale tend vers $+\infty$.