TD 2 : IDENTIFIER UN MODELE DE COMPORTEMENT DU PREMIER ORDRE

Exercice 2.1 : **MOTEUR D'UN SYSTEME D'HEMODIALYSE**

Q1 : Déterminer les performances en stabilité et rapidité de ce système.

Stabilité : système du premier ordre de classe 0. Le système est stable et la réponse ne présente pas de dépassement.

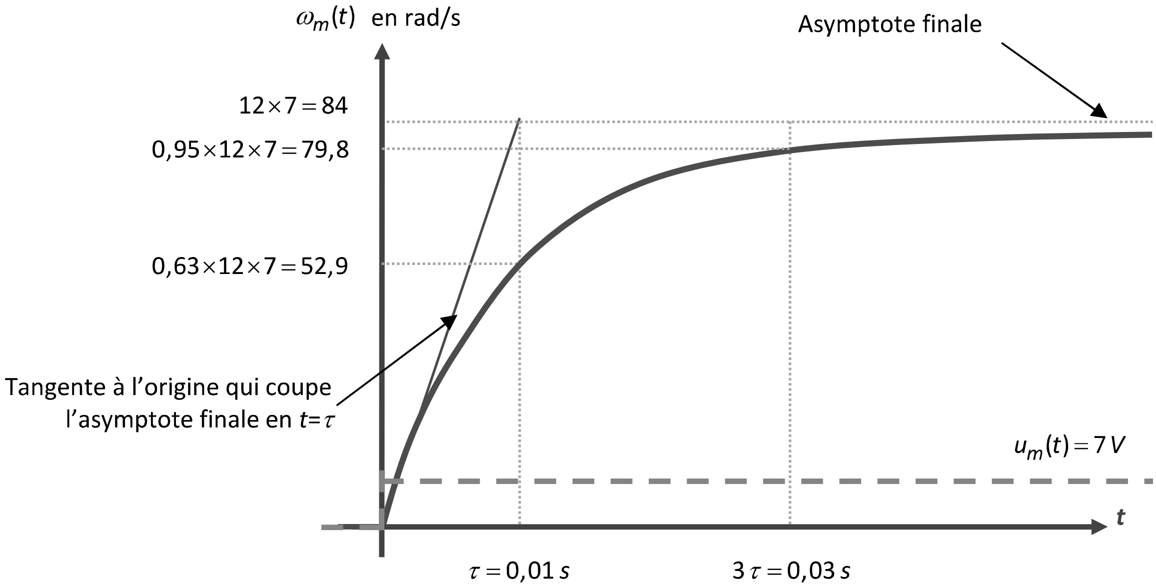
Rapidité : $$\left.\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}\right|_{Cr(p)=0} = \frac{1200}{100+p} = \frac{1200}{100}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{100}p\right)} = \frac{12}{1+0{,}01p} = \frac{K}{1+\tau p}$$

Par identification : $\tau = 0{,}01s$ et $K = 12$ rad/s.

d'où $tr_{5\%} \approx 3\times\tau = \boxed{0{,}03s}$

Q2 : Tracer en faisant apparaître les points caractéristiques, l'allure de la sortie $\omega_m(t)$ pour une entrée en échelon d'amplitude $U_0 = 7$ V.

Pour une entrée en échelon d'amplitude $U_0 = 7V$:



Q3 : Déterminer un modèle de comportement du hacheur $\frac{U_m(p)}{C(p)}$.

La réponse ressemble à un échelon bruité de valeur initiale 3V et de valeur finale 9V.

À l'échelle de temps proposée, la réponse est assimilable à un échelon à l'instant t=0,05 s.

Le comportement est donc assimilable à un gain pur.

L'amplitude de l'échelon d'entrée est : $\Delta c = 768 - 256 = 512$ incréments.

La variation finale de la tension d'alimentation du moteur est : $\Delta U_m(+\infty) = 9 - 3 = 6$ V.

D'où : $\frac{U_m(p)}{C(p)} = \frac{6}{512} = 0{,}0117$ V/incrément.

Exercice 2.2 : **ASSERVISSEMENT D'UN NIVEAU D'EAU**

Q1 : Exprimer l'équation différentielle (5) dans le domaine de Laplace et en déduire les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ associées aux comportements en poursuite et en régulation, sous forme canonique.

$$\frac{S}{K_p K_c} pH(p) + H(p) = H_c(p) - \frac{1}{K_p K_c} Q_s(p) \Leftrightarrow H(p)\left(1 + \frac{S}{K_p K_c} p\right) = H_c(p) - \frac{1}{K_p K_c} Q_s(p)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{H(p) = \frac{1}{1 + \frac{S}{K_p K_c} p} H_c(p) + \frac{-\frac{1}{K_p K_c}}{1 + \frac{S}{K_p K_c} p} Q_s(p)}$$

D'où : $H_1(p) = \left.\frac{H(p)}{H_c(p)}\right|_{Q_s(p)=0} = \frac{1}{1 + \frac{S}{K_p K_c} p}$ et $H_2(p) = \left.\frac{H(p)}{Q_s(p)}\right|_{H_c(p)=0} = \frac{-\frac{1}{K_p K_c}}{1 + \frac{S}{K_p K_c} p}$.

> $H_1(p)$ est la fonction de transfert de poursuite, reliant la réponse à la consigne. $H_2(p)$ est la fonction de transfert de régulation, reliant la réponse à la perturbation. Dans un modèle linéaire, les deux réponses sont sommées.

Q2 : Déterminer les performances de stabilité des fonctions de transfert en poursuite et régulation.

Fonctions de transfert de classe 0, d'ordre 1, constante de temps positive : modèles stables et sans dépassement.

> Par défaut et convention, les paramètres physiques du système sont positifs.

Q3 : À partir de l'analyse de la réponse expérimentale, identifier le gain K_p de l'ensemble amplificateur-moto-pompe.

Sur la fonction de transfert en poursuite : $\tau_1 = \frac{S}{K_p K_c}$. En déterminant la constante de temps expérimentale, on peut en déduire la valeur de K_p.

On mesure $\Delta h(+\infty) = 3$ cm, d'où $h_{63\%} = h_0 + 0{,}63\,\Delta h(+\infty) = 24{,}8 + 0{,}63 \times 3 \approx 26{,}7$ correspondant à $t = 12{,}5$.

On en déduit : $\tau = 12{,}5 - 10 = 2{,}5$ s.

On a : $\frac{S}{K_p K_c} = \tau \Rightarrow K_p = \frac{S}{\tau K_c} = \frac{\pi 0{,}05^2}{2{,}5 \times 600} =$ 5,2e-6 $m^3.s^{-1}/V$.

Q4 : Déterminer la variation de hauteur d'eau induite par la variation de consigne, puis induite par la variation de débit. Déterminer la variation totale de hauteur d'eau après les deux manipulations.

Les fonctions de transfert sont de classe 0 :

Après la variation de consigne : $\Delta h(+\infty) = K_1 h_0 = h_0$

Après la variation de perturbation : $\Delta h(+\infty) = K_2 q_0 = -\frac{q_0}{K_p K_c}$

La variation totale est la somme des variations : $\Delta h(+\infty) = K_1 h_0 + K_2 q_0 = h_0 - \frac{q_0}{K_p K_c}$

Q5 : En déduire les performances de précision en poursuite et en régulation.

L'erreur statique est nulle, le système est précis en poursuite, mais il est sensible à la perturbation de débit de sortie.

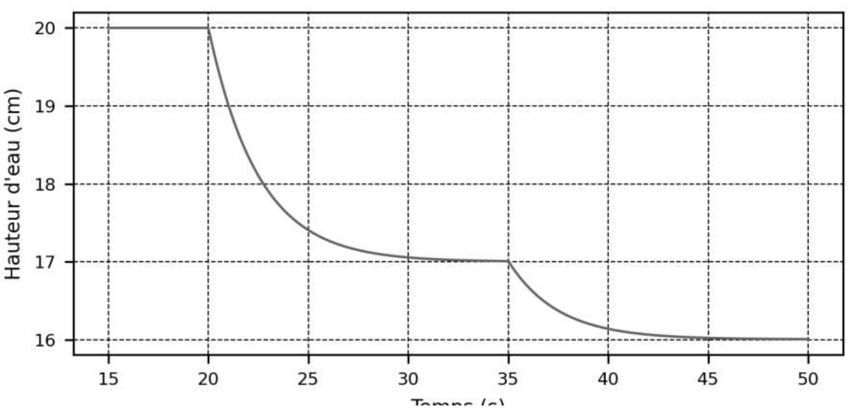
Q6 : Déterminer les valeurs numériques de Δh_1, Δh_2 et Δh_t pour $h_0 = -3$ cm et $q_0 = 2$ litre/m. Tracer l'évolution approchée de $h(t)$ (cm) en prenant $t_1 = 20$ s et $t_2 = 35$ s avec une hauteur d'eau initialement stabilités à 20 cm.

$\Delta h_1 = 1 \times h_0 = -3$ cm

$\Delta h_2 = -318 \times \frac{2}{1000 \times 60} \approx -1$ cm

D'où : $\Delta h_t = -4$ cm.

> Le temps de réponse est le même pour les 2 fonctions et ne dépend pas de l'amplitude de l'échelon dans le domaine linéaire.



Exercice 2.3 : **POSITIONNEMENT LINEAIRE D'UN ROBOT**

Q1 : Proposer un modèle de comportement en poursuite de l'axe $H_1(p) = \left.\dfrac{X(p)}{X_c(p)}\right|_{F(p)=0}$.

Le comportement, à partir de t=0,5 s jusqu'à t=2 s correspond à la réponse à un échelon d'un système du premier ordre de classe 0 : valeur finale, pas de dépassement ni de point d'inflexion visible, pente à l'origine pouvant être non nulle.

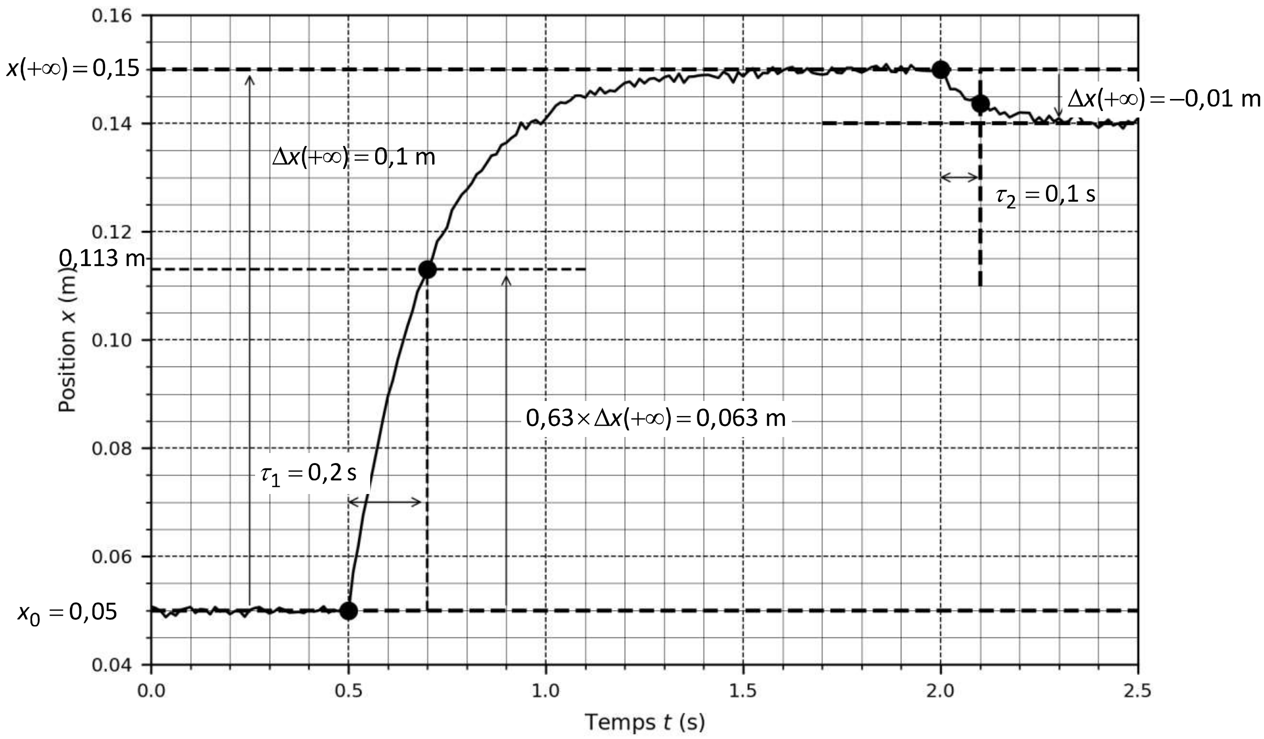
On relève : position initiale $x_0 = 0{,}05$ m valeur finale $x(+\infty) = 0{,}15$ m

D'où la variation totale : $\Delta x(+\infty) = x(+\infty) - x_0 = 0{,}15 - 0{,}05 = 0{,}1$ m. On en déduit : $K_1 = \dfrac{\Delta x(+\infty)}{E_0} = 1$ m/m

La réponse pour une variation de 63% est $x = x_0 + 0{,}63 \times \Delta x(+\infty) = 0{,}113$ m,

ce qui correspond à l'instant $t_0 + \tau_1 = 0{,}7$ s. D'où : $\tau_1 = 0{,}2$ s.

La fonction de transfert du modèle de comportement en poursuite est $\underline{\left. H_1(p) = \dfrac{1}{1+0{,}2\,p} \right|}$.



> Pour validation du modèle, on peut tracer la tangente à l'origine et vérifier que $t_{r5\%}$ est proche de $3\tau = 0{,}6$ s.

Q2 : Proposer un modèle de comportement en régulation de l'axe $H_2(p) = \left.\dfrac{X(p)}{F(p)}\right|_{X_c(p)=0}$.

Le comportement à partir de t=2 s correspond à la réponse à un échelon d'un système du premier ordre de classe 0 : pas de dépassement ni de point d'inflexion visible, pente à l'origine pouvant être non nulle.

> La valeur initiale de la réponse est la valeur finale du premier échelon, soit 0,15 m. La valeur finale 0,14 m.

On relève : $\Delta x(+\infty) = 0{,}14 - 0{,}15 = -0{,}01$ m, d'où $K_2 = \dfrac{-0{,}01}{200} = -5 \times 0^{-5}$ m/N.

La réponse après une variation de 63% vaut : $x = 0{,}15 + 0{,}63 \times \Delta x(+\infty) = 0{,}15 - 0{,}63 \times 0{,}01 = 0{,}144$ m correspondant à l'instant 2,1 s, d'où : $\tau_2 = 2{,}1 - 2 = 0{,}1$ s.

La fonction de transfert du modèle de comportement en régulation est $\underline{\left. H_2(p) = \dfrac{-5 \times 10^{-5}}{1+0{,}1\,p} \right|}$.

Q3 : Définir la position $X(p)$ et fonction de $X_c(p)$ et $F(p)$.

Dans les conditions de Heaviside, $X(p) = H_1(p)\,X_c(p) + H_2(p)\,F(p) = \dfrac{1}{1+0{,}2p} X_c(p) + \dfrac{-5 \times 10^{-5}}{1+0{,}1p} F(p)$.

Exercice 2.4 : **CAPTEUR DE VITESSE DE LA PLATE-FORME 6 AXES**

Q1 : Déterminer les performances de stabilité et rapidité du moteur.

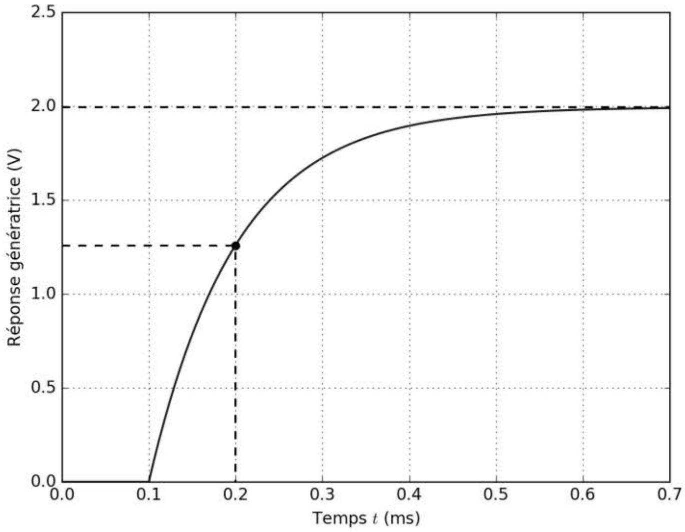
Stabilité : système du premier ordre de classe 0. Les coefficients au dénominateur sont de même signe ; le système est stable et la réponse ne présente pas de dépassement.

Rapidité : $\dfrac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \dfrac{131}{50+p} = \dfrac{131}{50}\dfrac{1}{(1+0{,}02\,p)} = \dfrac{2{,}62}{1+0{,}02\,p}$ d'où $\tau = 0{,}02$ s et $tr_{5\%} \approx 3\times\tau = 3\times 0{,}02 = \boxed{0{,}06s}$

Q2 : Indiquer l'ordre du système auquel le capteur peut être identifié. Justifier.

La courbe de sa réponse à un échelon présente une valeur finale, n'a pas de dépassement, la pente de la tangente à l'origine n'est pas nulle et la courbe ne présente pas de point d'inflexion : **le capteur peut donc être modélisé par un système du 1er ordre de classe 0.**

Q3 : Déterminer ses paramètres caractéristiques ainsi que sa fonction de transfert.



On relève e $\Delta u_{mes}(+\infty) = 2\,V$ d'où un gain statique

$K = \dfrac{2\,V}{10{,}5\,rad/s} \Rightarrow \boxed{K = 0{,}19\,V/(rad/s)}$

La réponse à 63% de variation vaut $u_{mes} = 0 + 0{,}63\times 2 = 1{,}26$ V correspondant à l'intant $t = 0{,}2$ ms . D'où : $\tau = 10^{-4}$ s .

Le modèle de comportement s'écrit :

$$\frac{U_{mes}(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{K}{1+\tau\,p} = \frac{0{,}19}{1+10^{-4}\,p}$$

Q4 : Après avoir comparé les constantes de temps du moteur et du capteur, justifier que le capteur peut être assimilé à un gain pur.

Les constantes de temps ne sont pas du même ordre de grandeur :

constante de temps du capteur (10^{-4} s) << constante de temps du moteur (0,02 s).

La durée du régime transitoire du capteur est négligeable devant celle du moteur.

> Le capteur réagit donc (comparé à l'évolution de la vitesse en sortie du moteur $\omega_m(t)$) de manière quasi « instantanée » sur la grandeur qu'il reçoit en entrée $\omega_m(t)$. On suppose qu'il est toujours en régime permanent.

Ainsi sa fonction de transfert peut être modélisée par :

$\boxed{H_{capteur}(p) = 0{,}19\,V/(rad/s)}$ **(fonction de transfert proportionnelle ou de gain pur)**

> Tout système possède un temps de réponse, mais celui-ci peut être négligeable devant les temps de réponse d'autres systèmes auxquels il est associé.

Q5 : En déduire la fonction de transfert de l'ensemble moteur + capteur.

Avec cette modélisation, on a donc pour l'ensemble *moteur + capteur* :

$$\frac{U_{mes}(p)}{U_m(p)} = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}\cdot\frac{U_{mes}(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{2{,}62\times 0{,}19}{1+0{,}02\,p} = \boxed{\frac{0{,}5}{1+0{,}02\,p}}$$

Q6 : En utilisant le modèle ainsi défini, tracer les tensions d'entrée et de réponse pour une entrée définie ainsi :

- à t=0,1 s, échelon de tension de 6V ;
- à t=0,2 s s, échelon de tension de -3V.

> La courbe ci-contre est tracée sans tenir compte de l'hypothèse de la question 4. L'effet de la constante de temps du capteur est effectivement négligeable.