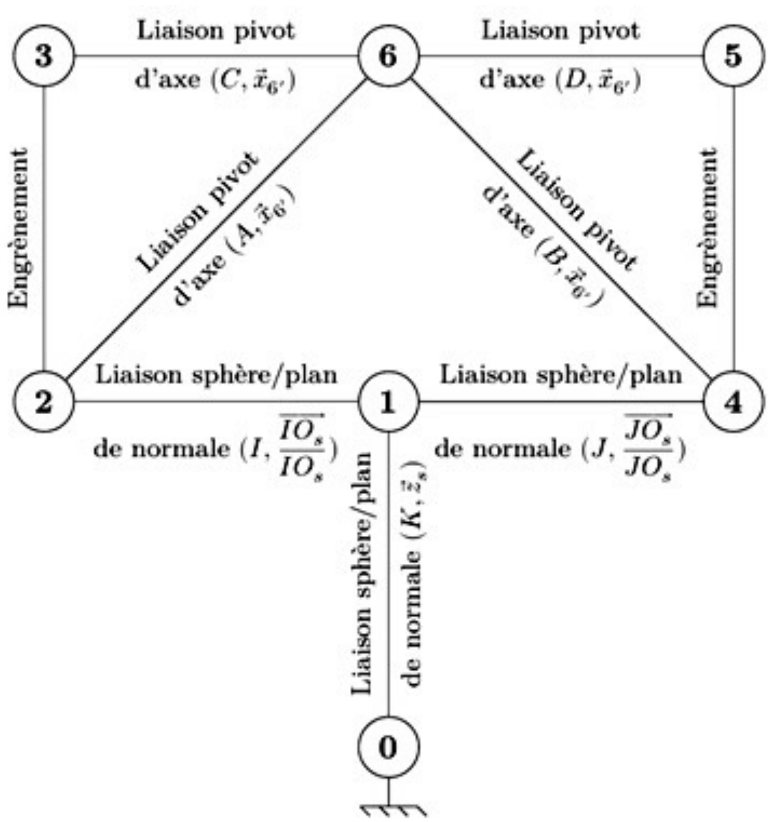
Correction du DS5 du 29 Mars 2025

EXERCICE 1

Q1 :



Q2 : On cherche $\left\{\mathcal{V}_{6/1}\right\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{6/1} \\ \vec{V}_{A\in 6/1} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} p_{61}\vec{x}'_6 + r_{61}\vec{z}_{6'} \\ \vec{0} + \overrightarrow{AO}\wedge\left(p_{61}\vec{x}'_6 + r_{61}\vec{z}'_6\right) \end{Bmatrix}_A$

$$= \begin{Bmatrix} p_{61}\vec{x}_{6'} + r_{61}\vec{z}_{6'} \\ -L\vec{x}'_6\wedge\left(p_{61}\vec{x}_{6'} + r_{61}\vec{z}_{6'}\right) \end{Bmatrix}_A = \boxed{\begin{Bmatrix} p_{61}\vec{x}_{6'} + r_{61}\vec{z}_{6'} \\ L r_{61}\vec{y}_{6'} \end{Bmatrix}_A = \left\{\mathcal{V}_{6/1}\right\}_A}$$

$$\boxed{\left\{\mathcal{V}_{2/6}\right\}_A = \begin{Bmatrix} p_{26}\vec{x}_{6'} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{1/2}\right\}_A = -\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}_A = \begin{Bmatrix} -\vec{\Omega}_{1/2} \\ \underset{*}{\vec{V}_{A\in 1/2}} \end{Bmatrix}_A$$

$$* \ \vec{V}_{A\in 1/2} = \vec{V}_{I\in 1/2} + \overrightarrow{AI}\wedge\vec{\Omega}_{1/2} = -R\vec{z}_{6'}\wedge\left(-p_{21}\vec{x}_{6'} - q_{21}\vec{y}_{6'} - r_{21}\vec{z}_{6'}\right)$$

$$= R p_{21}\vec{y}_{6'} - R q_{21}\vec{x}_{6'}$$

d'où $$\boxed{\left\{\mathcal{V}_{1/2}\right\}_A = \begin{Bmatrix} -p_{21}\vec{x}_{6'} - q_{21}\vec{y}_{6'} - r_{21}\vec{z}_{6'} \\ R p_{21}\vec{y}_{6'} - R q_{21}\vec{x}_{6'} \end{Bmatrix}_A}$$

Q3 : L'égalité torsorielle $\{\mathcal{V}_{6/1}\}_A + \{\mathcal{V}_{1/2}\}_A + \{\mathcal{V}_{2/6}\}_A = \{0\}_A$

donne : (1) $p_{61}\vec{x}_{6'} + r_{61}\vec{z}_{6'} + p_{26}\vec{x}_{6'} - p_{21}\vec{x}_{6'} - q_{21}\vec{y}_{6'} - r_{21}\vec{z}_{6'} = \vec{0}$

(2) $L r_{61}\vec{y}_{6'} + R p_{21}\vec{y}_{6'} - R q_{21}\vec{x}_{6'} = \vec{0}$

L'équation (1) projetée sur $\vec{z}_{6'}$ donne : $r_{61} - r_{21} = 0$

$$r_{61} = r_{21} = k\frac{R}{2L}(p_{36} - q_{56})$$

d'où $\boxed{r_{61} = k\frac{R}{2L}(p_{36} - p_{56})}$ donc $\boxed{d = \frac{kR}{2L}}$

Q4 : L'équation (2) projetée sur $\vec{y}_{6'}$ donne :

$$L r_{61} + R p_{21} = 0$$

$$p_{21} = -\frac{L}{R} r_{61} = -\frac{\cancel{L}}{\cancel{R}} \times k \times \frac{\cancel{R}}{2\cancel{L}}(p_{36} - p_{56})$$

d'où $\boxed{p_{21} = \frac{k}{2}(p_{56} - p_{36})}$ (*)

Q5 : La projection de (1) sur $\vec{x}_{6'}$ donne :

$$p_{61} + p_{26} - p_{21} = 0 \iff p_{61} = p_{21} - p_{26}$$

d'après (*) $p_{61} = \frac{k}{2}(p_{56} - p_{36}) - p_{26}$

or $\frac{p_{26}}{p_{36}} = -k \Rightarrow p_{26} = -k\, p_{36}$

$$p_{61} = \frac{k}{2}p_{56} - \frac{k}{2}p_{36} + k\, p_{36} = \frac{k}{2}(p_{56} + p_{36})$$

$\boxed{p_{61} = \frac{k}{2}(p_{56} + p_{36})}$ $\mu = \frac{k}{2}$

Q6 : Pas de tangage $\Rightarrow$ la rotation autour de $\vec{x}_{6,1} = 0$

autrement dit $\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{p_{61} = 0}$

Q7 : Si $p_{61} = \frac{h}{2}(p_{56} + p_{36}) = 0$ alors $\boxed{p_{56} = -p_{36}}$

Les deux moteurs ont une vitesse égale et opposée en ligne (ils tournent en sens inverse l'un de l'autre)

Q8 : En ligne droite, le châssis 6 n'a pas de mouvement de lacet par rapport à 1, donc $\boxed{r_{61} = 0}$

Q9 : $r_{61} = \lambda(p_{36} - p_{56}) = 0 \Rightarrow \boxed{p_{36} = p_{56}}$

Q10 : On a $\vec{V}_{K\in 1/0} = \vec{V}_{O_S\in 1/0} + \vec{KO_S} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

$$\vec{0} = V \cdot \vec{y}_s + R_s \vec{z}_s \wedge (p_{10}\vec{x}_s + q_{10}\vec{y}_s + r_{10}\vec{z}_s)$$

$$= V\vec{y}_s + R_s p_{10} \vec{y}_s - R_s q_{10} \vec{x}_s$$

en projection sur $\vec{y}_s$ on a : $0 = V + R_s p_{10} \Rightarrow \boxed{p_{10} = -\frac{V}{R_s}}$

Q11 : Si $\alpha =$ Cte alors $\dot{\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega}_{6/0} \cdot \vec{x}_s = 0 = p_{60}}$

Q12 : $p_{61} = p_{60} - p_{10} \Rightarrow \boxed{p_{61} = -p_{10}}$

Q13 : $V = -R_s p_{10} = R_s p_{61} = R_s \times \frac{k}{2}(p_{56} + p_{36})$

ligne droite $p_{56} = p_{36}$ d'où $\underline{V = R_s k p_{56}}$

A.N. $p_{56} = \frac{120\cancel{0} \times \cancel{2}\pi}{\cancel{60}\ 3\cancel{0}} = 40\pi$ d'où $V = 0{,}074 \times 0{,}21 \times 40\pi$

$= 1{,}95 \text{ m/s} < 2 \text{ m/s}$

EXERCICE 2 :

Q14 : $V(p) = K_8\, \Omega_r(p) = -R\, \Omega_r(p) \Rightarrow K_8 = -R = -0{,}25 \text{ m}$

$\Omega_r(p) = K_9\, V(p) = -\frac{1}{r} V(p) \Rightarrow K_9 = -\frac{1}{r} = -6{,}67 \text{ m}^{-1}$

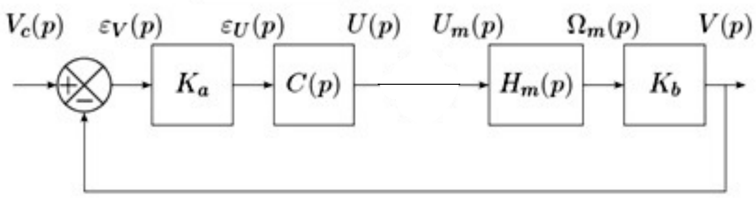
$\varepsilon_u = 0$ si $V_c = V$ or $\varepsilon_u = K_1 V_c - K_{11} K_{10} K_9 V$

$\Rightarrow K_1 = K_{11} K_{10} K_9 = 60 \times \frac{1}{2{,}5}(-6{,}67)$

$= -160 \text{ V.s.m}^{-1}$

Q15 : On applique le principe de superposition $H_1(p)$ est la fonction de transfert en poursuite et $H_2(p)$ la fonction de transfert en régulation.

Q16 $H_1(p) = \left.\frac{V(p)}{V_c(p)}\right|_{F_{res}=0}$ ce qui donne le schéma bloc suivant :

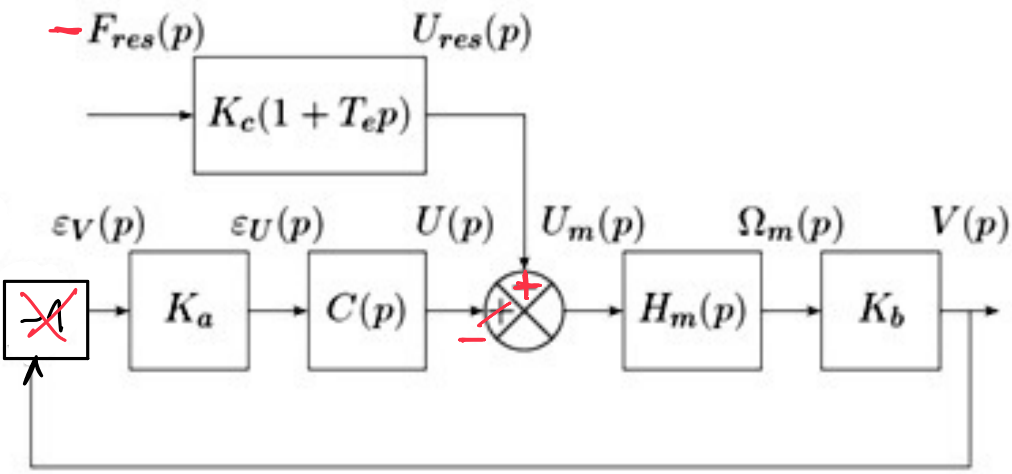


$$H_1(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{K_a\, C(p)\, H_m(p)\, K_b}{1 + K_a\, C(p)\, H_m(p)\, K_b} = \frac{K_a K_b C\, H_m(p)}{1 + K_a K_b C\, H_m(p)}$$

$$H_1(p) = \frac{\dfrac{K_a K_c C K_m}{(1+T_e p)(1+T_m p)}}{1 + \dfrac{K_a K_c C K_m}{(1+T_e p)(1+T_m p)}} = \frac{K_a K_c C K_m}{(1+T_e p)(1+T_m p) + K_a K_c C K_m}$$

$$\boxed{H_1(p) = \frac{K_{B0}}{(1+T_e p)(1+T_m p) + K_{B0}}}$$

$$H_2(p) = \left.\frac{V(p)}{F_{res}(p)}\right|_{V_c = 0}$$



$$H_2(p) = K_c(1+T_e p) \times \frac{H_m K_b}{1 + K_a K_b C H_m} = K_c(1+T_e p)\, \frac{\dfrac{K_m K_b}{(1+T_e p)(1+T_m p)}}{1 + \dfrac{K_a K_b C K_m}{(1+T_e p)(1+T_m p)}}$$

$$\boxed{H_2(p) = \frac{K_b K_c K_m (1+T_e p)}{(1+T_e p)(1+T_m p) + K_{B0}}}$$

Q18 : $\lim\limits_{t\to+\infty} v_1(t) = \lim\limits_{p\to 0} p V_1(p) = \lim\limits_{p\to 0} p \times \dfrac{V_0}{p} \times H_1(p) = \boxed{\dfrac{V_0 K_{B0}}{1 + K_{B0}}}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} v_2(t) = \lim\limits_{p\to 0} p V_2(p) = \lim\limits_{p\to 0} p \times \dfrac{F_0}{p} \times H_2(p) = \boxed{\dfrac{K_b K_c K_m F_0}{1 + K_{B0}}}$

Q19 : $|v_2| < 0{,}1|v_1|$ $\quad \dfrac{K_b K_c K_m F_0}{\cancel{1+K_{B0}}} < 0{,}1 \times \dfrac{V_0 K_{B0}}{\cancel{1+K_{B0}}}$

$$\cancel{K_b} K_c \cancel{K_m} F_0 < 0{,}1 \times V_0 C K_a \cancel{K_b} \cancel{K_m}$$

$$\Rightarrow C_{pot} > \frac{K_c F_0}{0{,}1 V_0 K_a} = \frac{0{,}1 \times 400}{0{,}1 \times 8 \times 1000} = 0{,}05$$

Q20 : $FTBF = \dfrac{CK_N}{(1+T_m p)(1+T_e p) + CK_N}$ $\quad K = \dfrac{CK_N}{1+CK_N} \neq 1 \Rightarrow$ pas précis.

Q21 : $FTBF = \dfrac{V(p)}{V_c(p)} = \dfrac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)} = \dfrac{\dfrac{C}{T_m p}\cancel{(1+T_m p)}\dfrac{K_N}{\cancel{(1+T_m p)}(1+T_e p)}}{1+\dfrac{C}{T_m p}\cancel{(1+T_m p)} \times \dfrac{K_N}{\cancel{(1+T_m p)}(1+T_e p)}}$

$$FTBF = \frac{CK_N}{T_m p(1+T_e p) + CK_N} = \boxed{\frac{1}{1+\dfrac{T_m}{CK_N}p + \dfrac{T_e T_m}{CK_N}p^2}}$$

on a alors $\boxed{K = 1}$ $\quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{CK_N}{T_e T_m}}}$

$$\xi = \frac{1}{2}\omega_0 \times \frac{T_m}{CK_N} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{CK_N}{T_e T_m}} \times \frac{T_m}{CK_N}$$

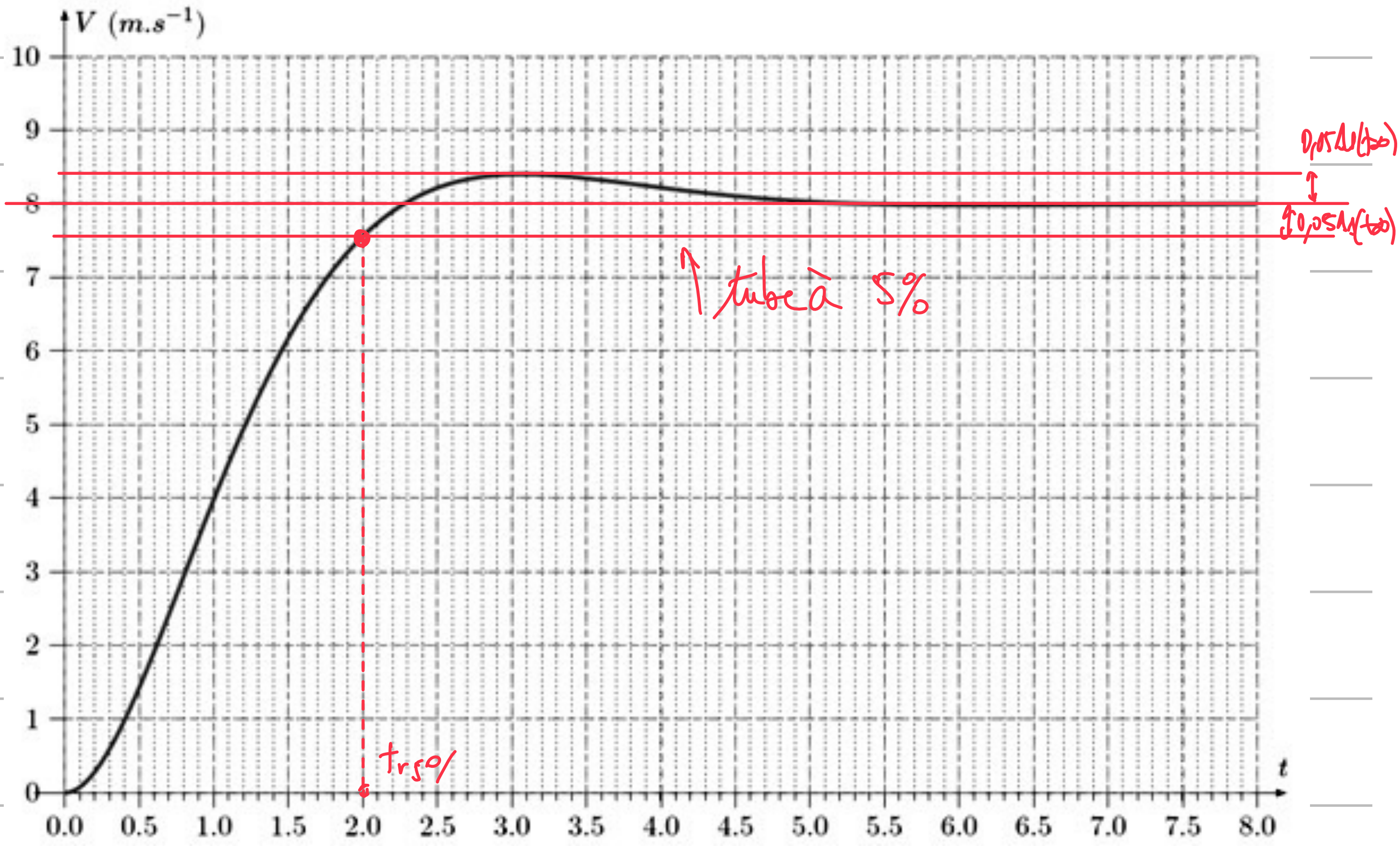
$$\boxed{\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_m}{T_e CK_N}}}$$

Q22 : Le temps de réponse le plus faible est donné pour

$\xi = 0{,}7$ alors $0{,}7 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{T_m}{T_e CK_N}}$ $\quad \boxed{C = \dfrac{1}{4 \times 0{,}7^2} \times \dfrac{T_m}{T_e K_N}}$

$$\text{A.N.} \quad \underline{C} = \frac{1}{4 \times 0{,}7^2} \times \frac{5}{0{,}5} \times \frac{1}{20} = \underline{0{,}255}$$

Q23 :



$t_{r5\%} = 2\,s < 3\,s$ ☺

FTBF avec $K = 1 \Rightarrow$ précis ☺

1.2.1 et 1.2.2. sont vérifiées.