

Correction du DS2 du 22 Novembre 2025

Q1: Vecteur position du point P:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CP} = z_A \vec{z}_0 + L_1 \vec{z}_1 + L_3 \vec{z}_3 + L_p \vec{z}_p$$

Q2: $\vec{z}_1 = \cos \alpha_1 \vec{z}_0 + \sin \alpha_1 \vec{x}_0$ $\vec{z}_3 = \cos \alpha_3 \vec{z}_0 + \sin \alpha_3 \vec{x}_0$

$$\vec{z}_p = \cos(\alpha_3 + \alpha_p) \vec{z}_0 + \sin(\alpha_3 + \alpha_p) \vec{x}_0$$

Ce qui donne :

$$x_p \vec{x}_0 + z_p \vec{z}_0 = z_A \vec{z}_0 + L_1 (\cos \alpha_1 \vec{z}_0 + \sin \alpha_1 \vec{x}_0) + L_3 (\cos \alpha_3 \vec{z}_0 + \sin \alpha_3 \vec{x}_0) + L_p (\cos(\alpha_3 + \alpha_p) \vec{z}_0 + \sin(\alpha_3 + \alpha_p) \vec{x}_0)$$

Par identification on obtient les 2 équations scalaires :

$$x_p = L_1 \sin \alpha_1 + L_3 \sin \alpha_3 + L_p \sin(\alpha_3 + \alpha_p) \quad (1)$$

$$z_p = z_A + L_1 \cos \alpha_1 + L_3 \cos \alpha_3 + L_p \cos(\alpha_3 + \alpha_p) \quad (2)$$

Q3: On écrit la fermeture géométrique vectorielle :

$$\vec{F} = \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BO} = \vec{0}$$

$$\vec{F} = z_A \vec{z}_0 + L_1 \vec{z}_1 + L_3 \vec{z}_3 - L_2 \vec{z}_2 - x_B \vec{x}_0 - z_B \vec{z}_0 = \vec{0}$$

Q4: L'équation vectorielle devient :

$$(z_A - z_B) \vec{z}_0 - x_B \vec{x}_0 + L_1 (\cos \alpha_1 \vec{z}_0 + \sin \alpha_1 \vec{x}_0) + L_3 (\cos \alpha_3 \vec{z}_0 + \sin \alpha_3 \vec{x}_0) - L_2 (\cos \alpha_2 \vec{z}_0 + \sin \alpha_2 \vec{x}_0) = \vec{0}$$

On a alors:

$$\begin{cases} \vec{F} \cdot \vec{z}_0 = 0 = (z_A - z_B) + L_1 \cos \alpha_1 + L_3 \cos \alpha_3 - L_2 \cos \alpha_2 \\ \vec{F} \cdot \vec{x}_0 = 0 = -x_B + L_1 \sin \alpha_1 + L_3 \sin \alpha_3 - L_2 \sin \alpha_2 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} L_2 \cos \alpha_2 = (z_A - z_B) + L_1 \cos \alpha_1 + L_3 \cos \alpha_3 \\ L_2 \sin \alpha_2 = -x_B + L_1 \sin \alpha_1 + L_3 \sin \alpha_3 \end{cases}$$

Alors

$$L_2^2 = \underbrace{\left((z_A - z_B) + L_1 \cos \alpha_1 + L_3 \cos \alpha_3 \right)^2}_A + \underbrace{\left(-x_B + L_1 \sin \alpha_1 + L_3 \sin \alpha_3 \right)^2}_B$$

Q5: L'entrée du système est la rotation du solide 1 (α_1)
la sortie est la position du point P (x_p, z_p)

Q6: Il faut affecter aux variables leur valeurs numériques

```
1 import numpy as np
2 import scipy.optimize as opt
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 L1= 37.62
6 L2= 29.4
7 L3= 20.1
8 Lp= 35.29
9 xB= 21.97
10 zB= 6.72
11 zA= 10
12 alphaP= (- np.pi * 11.98)/180
```

Q7:

```

13 def fgeo(var,*param):
14 """paramètres : - var=(alpha1,alpha3) (tuples de flottants), angle du bras 1 et angle de bras 3
15                  - param (tuple), zP point P sur z (en m)
16                  Résultat : (liste), les résidus des équations de lois entrée-sortie
17 # entrer équation loi-ES ci-dessous
18 (alpha1,alpha3)=var
19 (zP) = param
20 eq1= zA - zP + L1 * np.cos(alpha1) + L2 * np.cos(alpha3) + Lp * np.cos(alpha3 + alpha1)
21 eq2= - L2**2 + ((zA - zP) + L1 * np.cos(alpha1) + L2 * np.cos(alpha3))**2
22      + ((-xB + L1 * np.sin(alpha1) + L2 * np.sin(alpha3))**2

```

Q1

```

25 def Resolution_loi_ES(zP_min,zP_max,n):
26 """ Paramètres :
27     - zP_min : (flottant), demi-ouverture min (en m)
28     - zP_max : (flottant), demi-ouverture max (en m)
29     - n : nombre de points voulus
30 Sortie : deux listes :
31     - zP : (liste), demi-écartement pince -> point P sur z (en m)
32     - xP : (liste), point P sur x (en m)
33     - alpha1 (flottant), angle du bras 1 -> moteur
34     - alpha3 (flottant), angle de bras 3"""
35 zP=np.linspace(zP_min,zP_max,n) # tableau numpy linéairement répartis
36 xP=np.zeros(n) # tableau numpy de zéros et de longueur n
37 alpha1=np.zeros(n) # tableau numpy de zéros et de longueur n
38 alpha3=np.zeros(n) # tableau numpy de zéros et de longueur n
39 for i in range(0,n):
40     var0 = [70*np.pi/180,110*np.pi/180] # point de départ pas trop éloigné
41     alpha1[i],alpha3[i]= opt.fsolve(fgeo,var0,args=zP[i])
42     xP[i] = L1 * np.sin(alpha1) + L2 * np.sin(alpha3) + Lp * np.sin(alpha3 + alpha1)
43     return zP,xP,alpha1,alpha3

```

Q9: $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CO} = \vec{0}$

$$\vec{F} = x(t) \vec{x}_{01} + l_2 \vec{x}_2 + l_3 \vec{x}_3 - x \vec{x}_{01} - y \vec{y}_{01} = \vec{0}$$

$$\vec{F} = x(t) \vec{x}_{01} + l_2 (\cos \alpha_{21} \vec{x}_{01} + \sin \alpha_{21} \vec{y}_{01}) + l_3 (\cos \alpha_{31} \vec{x}_{01} + \sin \alpha_{31} \vec{y}_{01}) - x \vec{x}_{01} - y \vec{y}_{01} = \vec{0}$$

Q10:
$$\begin{cases} \vec{F} \cdot \vec{x}_{01} = 0 = x(t) + l_2 \cos \alpha_{21} + l_3 \cos \alpha_{31} - x & (1) \\ \vec{F} \cdot \vec{y}_{01} = 0 = l_2 \sin \alpha_{21} + l_3 \sin \alpha_{31} - y & (2) \end{cases}$$

Q11: (1) $\Rightarrow l_2 \cos \alpha_{21} = X - X(t) - l_3 \cos \alpha_{31}$

(2) $\Rightarrow l_2 \sin \alpha_{21} = Y - l_3 \sin \alpha_{31}$

(1)² + (2)² donne $l_2^2 = (X - X(t) - l_3 \cos \alpha_{31})^2 + (Y - l_3 \sin \alpha_{31})^2$

$\Leftrightarrow l_2^2 = (X - X(t))^2 - 2(X - X(t))l_3 \cos \alpha_{31} + l_3^2 \cos^2 \alpha_{31} + Y^2 - 2Yl_3 \sin \alpha_{31} + l_3^2 \sin^2 \alpha_{31}$
 $- l_2^2 + (X - X(t))^2 + l_3^2 - Y^2 = 2l_3(X - X(t)) \cos \alpha_{31} + 2l_3 Y \sin \alpha_{31}$

$$\underbrace{\frac{l_3^2 - l_2^2 + (X - X(t))^2 - Y^2}{2l_3}}_{= C} = (X - X(t)) \cos \alpha_{31} + Y \sin \alpha_{31}$$

Q12 Mettons l'expression de la question 11 sous la forme:

$$C = \sqrt{(X - X(t))^2 + Y^2} \left(\frac{(X - X(t))}{\sqrt{(X - X(t))^2 + Y^2}} \cos \alpha_{31} + \frac{Y}{\sqrt{(X - X(t))^2 + Y^2}} \sin \alpha_{31} \right)$$

d'où $\frac{C}{\sqrt{(X - X(t))^2 + Y^2}} = \cos(\varphi - \alpha_{31})$ tel que $\tan \varphi = \frac{Y}{(X - X(t))}$

d'où $\alpha_{31} = \varphi - \arccos\left(\frac{C}{\sqrt{(X - X(t))^2 + Y^2}}\right)$

Q13: La perturbation intervient à $t = 60 \text{ ms}$

En poursuite le système est stable et tend vers une valeur constante (1,65) (CDC vérifié). Il n'y a pas de dépassement (cdc vérifié).

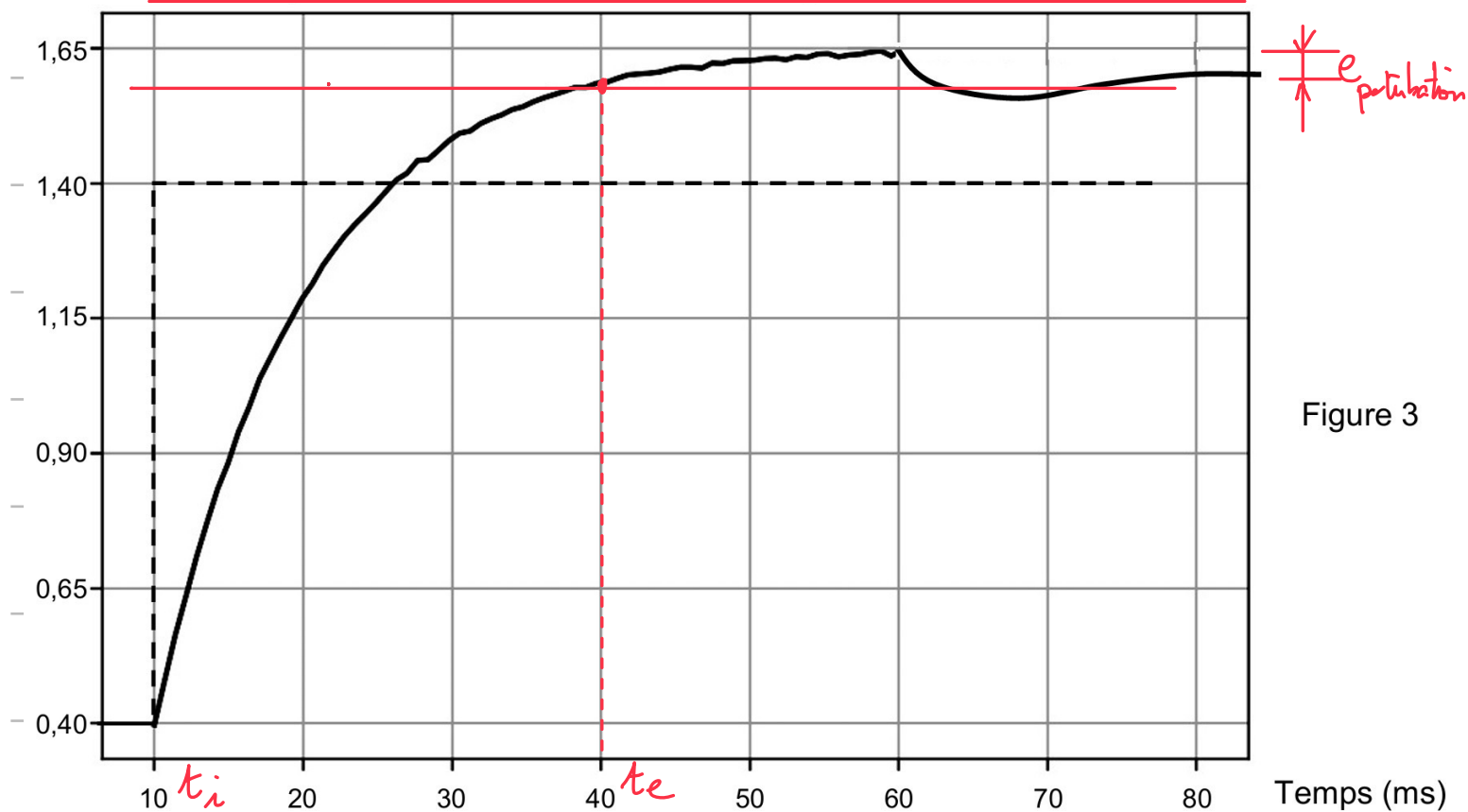


Figure 3

En poursuite $\Delta s(t\infty) = 1,65 - 0,40 = 1,25 \text{ m}$

$$\Delta e(t\infty) = 1,40 - 0,40 = 1,00 \text{ m}$$

$$\text{erreur statique} = 1,25 - 1,00 = 0,25 \text{ m}$$

$$\text{erreur statique \%} = \frac{0,25}{1} \times 100 = 25\% > 5\% \text{ (cdc non v\acute{e}rifi\acute{e})}$$

Temps de r\^eponse \u00e0 5%

$$0,05 \Delta s(t\infty) = 0,05 \times 1,25 = 0,0625 = \frac{0,25}{4} \text{ (un quart de graduation)}$$

$$\text{On obtient } t_e \text{ (entr\^ee dans le tiers)} = 40 \text{ ms}$$

$$t_i = 10 \text{ ms}$$

$$\Rightarrow t_{r5\%} = 40 - 10 = 30 \text{ ms} < 50 \text{ ms} \text{ (cdc respect\acute{e})}$$

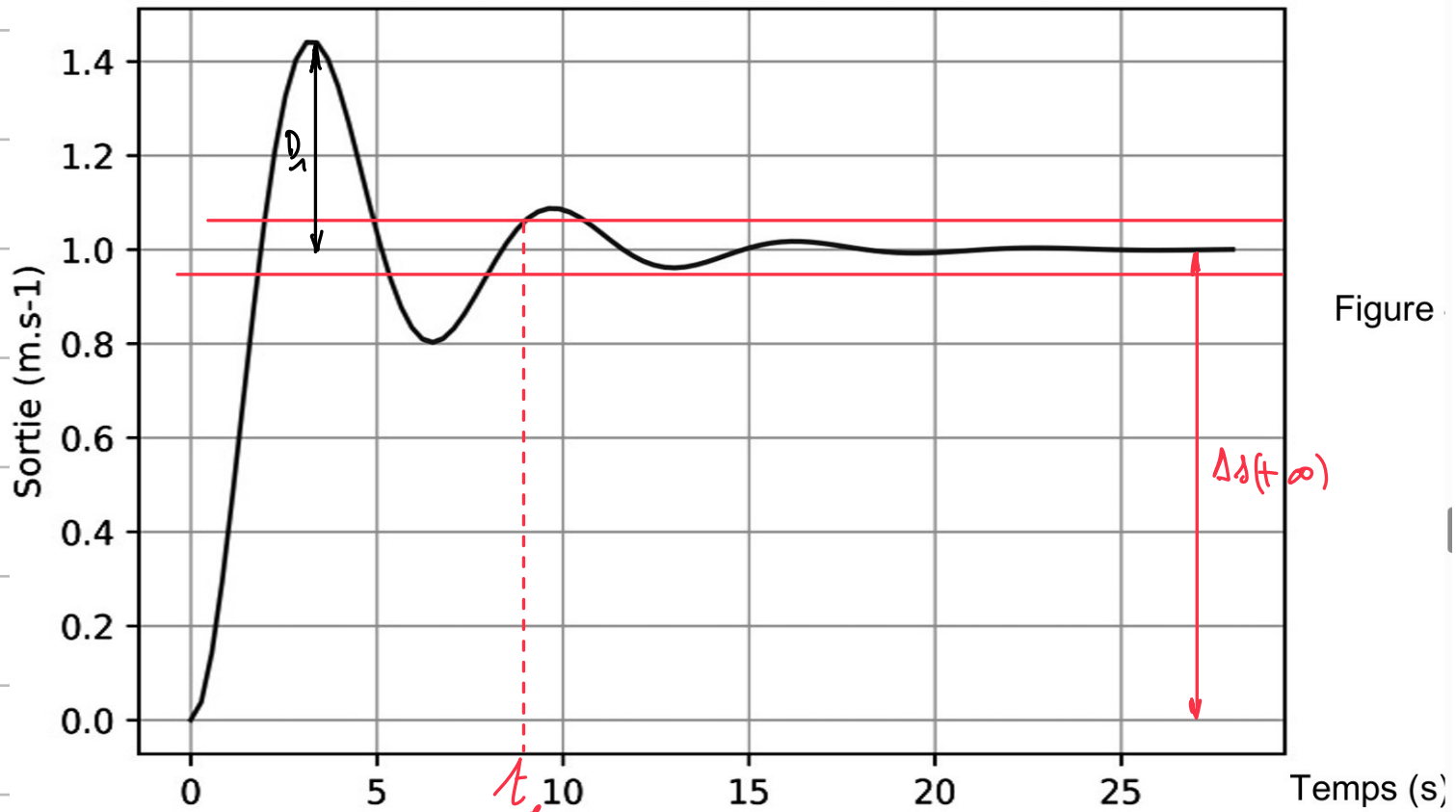
En r\^egulation: l'erreur du \u00e0 la perturbation est \u00e9gale

$$\text{\u00e0 } e_{\text{perturbation}} = \frac{0,25}{5} = 0,05 \text{ m}$$

L'erreur totale est égale à l'erreur en poursuite + l'erreur en régulation, ce qui donne $0,25 + 0,05 = 0,3 \text{ m}$

Q14:

Réponse à une consigne en échelon d'amplitude 1 m.s^{-1}



Le système est stable avec $D_n = 0,42 \text{ m/s}$

$$D_n \% = \frac{0,42}{1} \times 100 = 42\% > 30\% \text{ (CdC non vérifié)}$$

$$t_n \% = t_c - t_i = 8 \text{ s} < 25 \text{ s} \text{ (CdC vérifié)}$$

l'erreur est nulle (CdC vérifié).

Q15 : Chaîne d'information : codeur incrémental, l'UC,

Chaîne de puissance : hacheur dans l'UC, MCC, Réducteur
Poulie/courroie.

Q16 Q17 Q18

