Correction du Concours Blanc de Mai 2026

Q1 : $\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}_{Cd} = \left\{\begin{matrix}\omega_{21}\vec{y}_2\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{Cd}$ $\quad\left\{\mathcal{V}_{3/1}\right\}_{Cg} = \left\{\begin{matrix}\omega_{31}\vec{y}_3\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{Cg}$

Q2 : $\vec{V}_{Id\in 2/0} = \vec{V}_{Id\in 2/1} + \vec{V}_{Id\in 1/0} = \vec{V}_{Cd\in 2/1} + \vec{I_dC_d}\wedge\omega_{21}\vec{y}_{21}$
$$+ \vec{V}_{P\in 1/0} + \vec{I_dP}\wedge\omega_{10}\vec{z}_0$$
$$= r\vec{z}_1\wedge\omega_{21}\vec{y}_1 + V\vec{x}_1 + (r\vec{z}_1 + a\vec{y}_1)\wedge\omega_{10}\vec{z}_0$$
$$= -r\omega_{21}\vec{x}_1 + V\vec{x}_1 + a\omega_{10}\vec{x}_1$$
$$\boxed{\vec{V}_{Id\in 2/0} = (-r\omega_{21} + V + a\omega_{10})\vec{x}_1}$$

Q3 : Le roulement sans glissement s'écrit $\vec{V}_{Id\in 2/0} = \vec{0}$

ce qui donne $-r\omega_{21} + V + a\omega_{10} = 0$

d'où $\boxed{\omega_{21} = \dfrac{V + a\omega_{10}}{r}}$ (1)

Q4 : $\vec{V}_{Ig\in 3/0} = \vec{V}_{Ig\in 3/1} + \vec{V}_{Ig\in 1/0} = \vec{V}_{Cg\in 3/1} + \vec{I_gC_g}\wedge\omega_{31}\vec{y}_{31}$
$$+ \vec{V}_{P\in 1/0} + \vec{I_gP}\wedge\omega_{10}\vec{z}_1$$
$$\vec{V}_{Ig\in 3/0} = r\vec{z}_1\wedge\omega_{31}\vec{y}_1 + V\vec{x}_1 + (r\vec{z}_1 - a\vec{y}_1)\wedge\omega_{10}\vec{z}_1$$
$$= -r\omega_{31}\vec{x}_1 + V\vec{x}_1 - a\omega_{10}\vec{x}_1$$

R.S.G. en I_g $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_{31} = \dfrac{V - a\omega_{10}}{r}}$ (1')

Q5 : Le robot suit une trajectoire rectiligne, le torseur cinématique $\boxed{\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}_P = \left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ V\vec{x}_1\end{matrix}\right\}_P}$

Q6 : Si $\omega_{10} = 0$ alors $\boxed{\omega_{31} = \omega_{21} = \frac{V}{r}}$ d'après (1) et (1')

Q7 : On a $\vec{V}_{P\in 1/0} = \vec{V}_{O\in 1/0} + \vec{PO} \wedge \omega_{10}\vec{z}_0$

$= -R\vec{y}_1 \wedge \omega_{10}\vec{z}_1 = -R\omega_{10}\vec{x}_1$

d'où $\boxed{V = -R\omega_{10}}$

Q8 :

$(1) \Rightarrow \omega_{21} = \dfrac{V - \frac{a}{R}V}{r} = \boxed{V\left(\dfrac{1 - a/R}{r}\right) = \omega_{21}}$

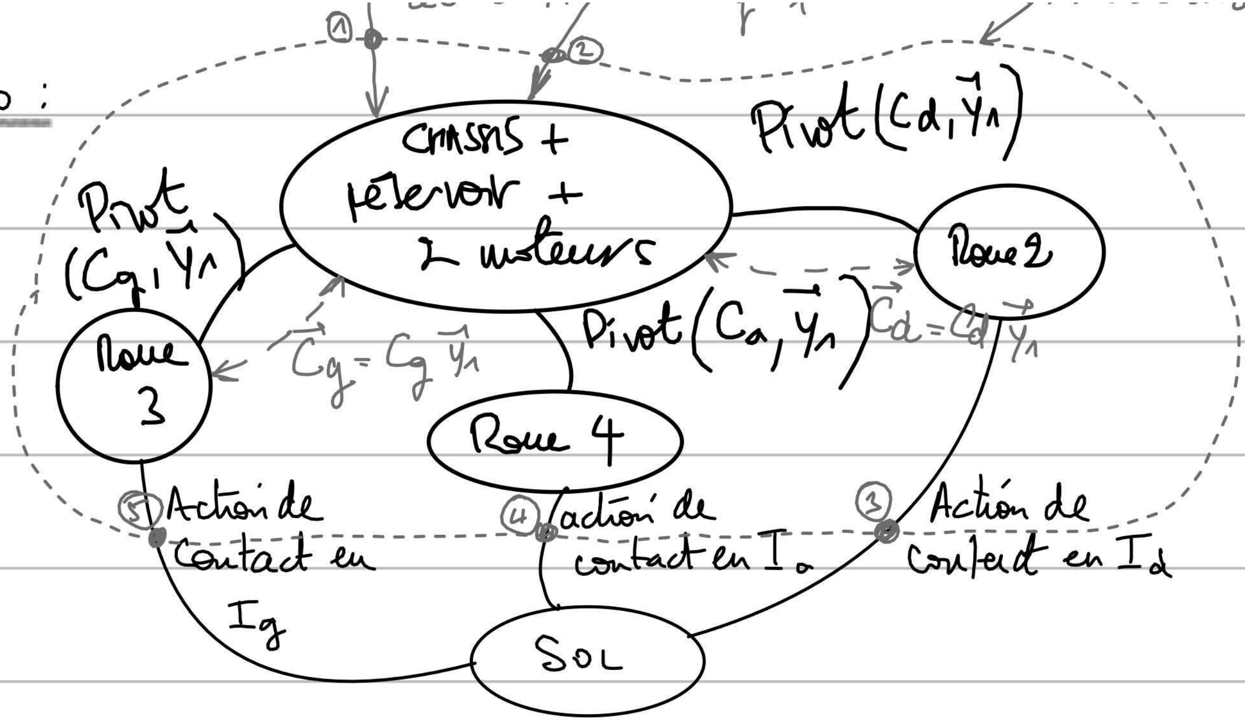
$(1') \Rightarrow \boxed{\omega_{31} = V\left(\dfrac{1 + a/R}{r}\right)}$

Q9 : Pour faire tourner le robot sur lui-même il faut que $V = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_{21} = \dfrac{a\omega_{10}}{r} \text{ et } \omega_{31} = -\dfrac{a\omega_{10}}{r}}$

d'où $\boxed{\dfrac{\omega_{21}}{\omega_{31}} = -1}$

$\vec{F}_{at} = F_{at}\vec{y}_1$ / $\vec{P} = -Mg\,\vec{z}_1$ Frontière d'isolement

Q10 :



Q11 : On isole le robot dans son ensemble (voir ci-dessus la frontière d'isolement)

Le B.A.M.E. donne : on a 5 torseurs d'efforts extérieurs 3 actions de contact avec le sol, $\vec{F}_{ext}$ et $\vec{P}$.

$$\left\{\mathcal{T}^{\vec{P}}_{pesanteur}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} -Mg\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G \qquad \left\{\mathcal{T}^{\vec{F}_{ext}}_{milieu\ ext.}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} F_{ext}\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$$

$$\left\{\mathcal{T}^{Contact}_{0\to 4}\right\}_{I_a} = \left\{\begin{matrix} X_4\vec{x}_1 + Y_4\vec{y}_1 + Z_4\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{I_a}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{0\to 3}\right\}_{I_g} = \left\{\begin{matrix} X_3\vec{x}_1 + Y_3\vec{y}_1 + Z_3\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{I_g}$$

$$\left\{\mathcal{T}_{0\to 2}\right\}_{I_d} = \left\{\begin{matrix} X_2\vec{x}_1 + Y_2\vec{y}_1 + Z_3\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{I_d}$$

Q12 : Le théorème de la résultante statique donne en projection sur $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$ et $\vec{z}_1$:

$$\boxed{\begin{cases} X_4 + X_3 + X_2 = 0 \\ Y_4 + Y_3 + Y_2 + F_{air} = 0 \\ Z_4 + Z_3 + Z_2 - Mg = 0 \end{cases}}$$

Q13 : On écrit la somme des moments au point I_d :

On utilise l'expression vectorielle des moments :

$$\vec{M}_{I_d,\vec{P}} = \vec{I_dG} \wedge \vec{P} \qquad \vec{M}_{I_d,F_{ext}} = \vec{I_dG} \wedge \vec{F}_{ext}$$

$$\vec{M}_{I_d,R_2} = \vec{0} \qquad \vec{M}_{I_d,R_3} = \vec{I_dI_g} \wedge \left(X_3\vec{x}_1 + Y_3\vec{y}_1 + Z_3\vec{z}_1\right)$$

$$\vec{M}_{I_d,R_4} = \vec{I_dI_a} \wedge \left(X_4\vec{x}_1 + Y_4\vec{y}_1 + Z_4\vec{z}_1\right)$$

Avec $\vec{I_dG} = \vec{I_dC_d} + \vec{C_dP} + \vec{PG}$

$$= r\vec{z}_1 + a\vec{y}_1 + x_G\vec{x}_1 + y_G\vec{y}_1 + z_G\vec{z}_1$$

$$\vec{I_dI_g} = 2a\vec{y}_1 \quad \text{et} \quad \vec{I_dI_a} = a\vec{y}_1 + b\vec{x}_1$$

$$\vec{M}_{I_d,\vec{P}} = \left(x_G\vec{x}_1 + (a+y_G)\vec{y}_1 + (r+z_G)\vec{z}_1\right) \wedge \left(-Mg\,\vec{z}_1\right)$$

$$= +Mg\left(x_G\vec{y}_1 - (a+y_G)\vec{x}_1\right)$$

$$\vec{M}_{I_d,\vec{F}_{ext}} = \left(x_G\vec{x}_1 + (a+y_G)\vec{y}_1 + (r+z_G)\vec{z}_1\right) \wedge \left(F_{ext}\,\vec{y}_1\right)$$

$$= F_{ext}\left(x_G\vec{z}_1 - (r+z_G)\vec{x}_1\right)$$

$$\vec{M}_{Id,R_3} = (2a\vec{y}_1)\wedge(X_3\vec{x}_1 + Y_3\vec{y}_1 + Z_3\vec{z}_1) = 2a(-X_3\vec{z}_1 + Z_3\vec{x}_1)$$

$$\vec{M}_{Id,R_4} = (a\vec{y}_1 + b\vec{x}_1)\wedge(X_4\vec{x}_1 + Y_4\vec{y}_1 + Z_4\vec{z}_1)$$

$$= -aX_4\vec{z}_1 + aZ_4\vec{x}_1 + bY_4\vec{z}_1 - bZ_4\vec{y}_1$$

$$= aZ_4\vec{x}_1 - bZ_4\vec{y}_1 + (bY_4 - aX_4)\vec{z}_1$$

Le théorème du moment statique donne :

$$\sum \vec{M}_{Id,\vec{F}_{extérieures}} = \vec{0}$$

d'où $\left(-Mg(a+Y_G) - F_{ext}(r+Z_G) + 2aZ_3 + aZ_4\right)\vec{x}_1$

$+ \left(Mg\,x_G - bZ_4\right)\vec{y}_1 + \left(F_{ext}\,x_G - 2aX_3 + bY_4 - aX_4\right)\vec{z}_1 = \vec{0}$

Ce qui donne le système :

$$\boxed{\begin{cases} 2aZ_3 + aZ_4 = Mg(a+Y_G) + F_{ext}(r+Z_G) \\ bZ_4 = Mg\,x_G \\ 2aX_3 - bY_4 + aX_4 = F_{ext}\,x_G \end{cases}}$$

Cela donne $\boxed{Z_4 = \dfrac{Mg\,x_G}{b}}$ (non demandé dans le sujet)

$$2aZ_3 = -\frac{a}{b}Mg\,x_G + Mg(a+Y_G) + F_{ext}(r+Z_G)$$

d'où

$$\boxed{Z_3 = -\frac{Mg\,x_G}{2b} + \frac{Mg}{2a}(a+Y_G) + \frac{F_{ext}}{2a}(r+Z_G)}$$

(non demandé)

Enfin $Z_2 = Mg - Z_3 - Z_4$

$$= Mg + \frac{Mg\,x_G}{2b} - \frac{Mg}{2a}(a + y_G) - \frac{F_{ext}}{2a}(r + z_G) - \frac{Mg\,x_G}{b}$$

$$Z_2 = Mg\left(1 - \frac{x_G}{2b} - \frac{1}{2} - \frac{y_G}{2a}\right) - \frac{F_{ext}}{2a}(r + z_G)$$

$$\boxed{Z_2 = \frac{Mg}{2}\left(1 - \frac{x_G}{b} - \frac{y_G}{a}\right) - \frac{F_{ext}}{2a}(r + z_G)}$$

(non demandé)

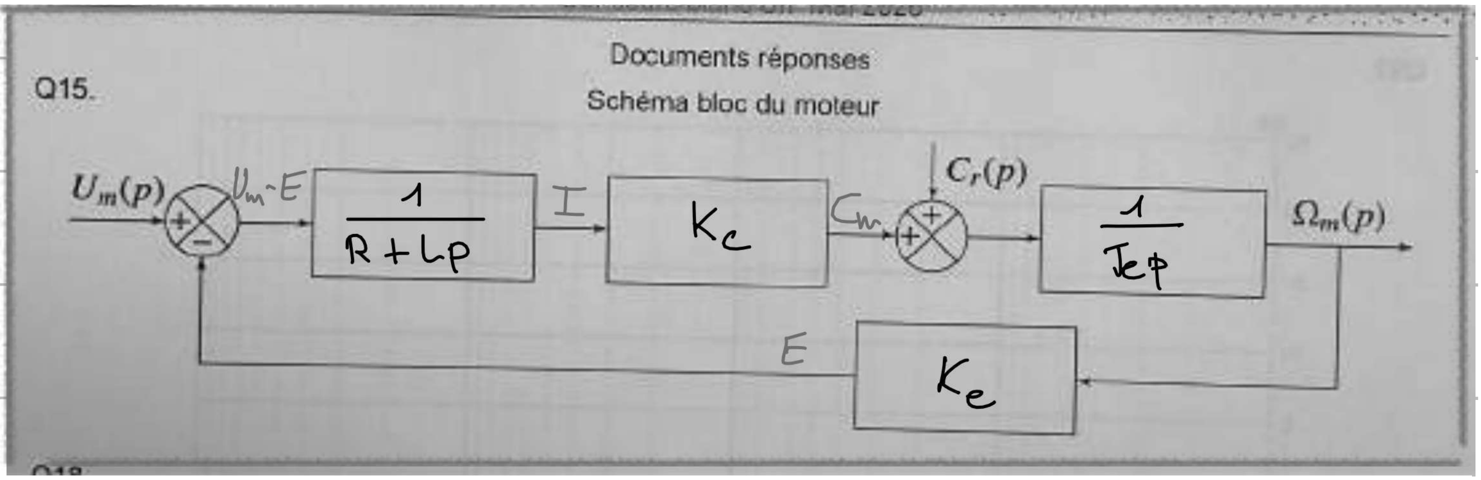
Q14 : Lorsque F_{ext} limite sera atteinte, le robot basculera autour de l'axe (I_g, I_a), c'est donc la roue droite qui va se soulever avec donc $\boxed{Z_2 = 0}$

Q15 : $U_m(p) = RI_m(p) + LpI_m(p) + E(p)$

$U_m(p) - E(p) = I_m(p)(R + Lp)$ d'où $\boxed{\dfrac{I_m(p)}{U_m(p) - E(p)} = \dfrac{1}{R + Lp}}$

$J_e\, p\, \Omega_m(p) = C_m(p) + C_r(p) \Rightarrow \boxed{\dfrac{\Omega_m(p)}{C_m(p) + C_r(p)} = \dfrac{1}{J_e p}}$

$C_m(p) = k_t I_m(p)$ et $E(p) = k_e \Omega_m(p)$



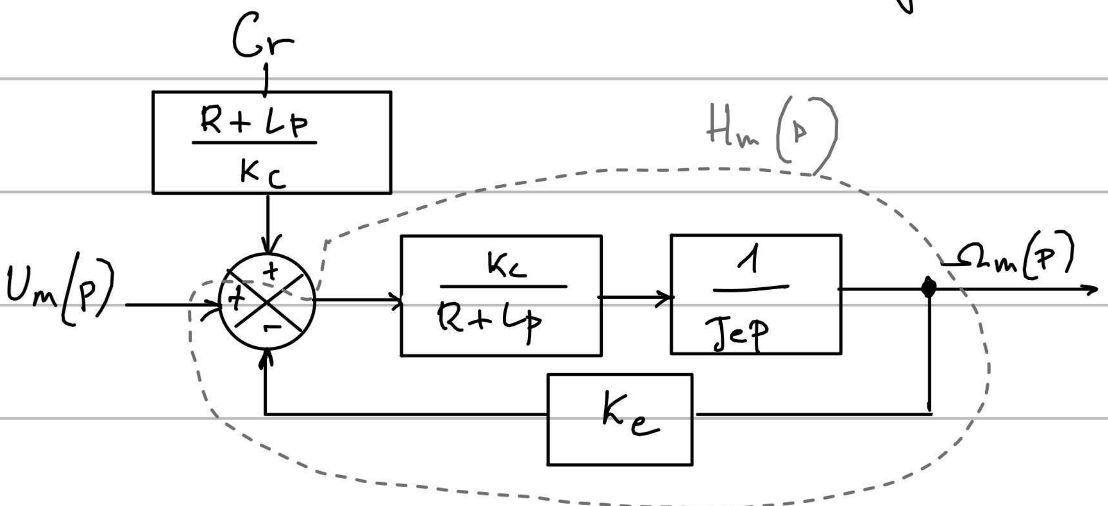
Q16 : $H_m(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \dfrac{\frac{1}{J_{eq}p} \times \frac{1}{R+Lp} \times K_c}{1 + K_e K_c \times \frac{1}{J_e p} \times \frac{1}{R+Lp}}$

$$H_m(p) = \frac{K_c}{J_e p(R+Lp) + K_e K_c} = \boxed{\frac{1/K_e}{1 + \frac{J_e R}{K_e K_c} p + \frac{J_e L}{K_e K_c} p^2} = H_m(p)}$$

$\boxed{k = \dfrac{1}{K_e}}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_e K_c}{J_e L}}}$ $\dfrac{J_e R}{K_e K_c} = \dfrac{2z}{\omega_0}$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2} \frac{J_e R}{K_e K_c} \times \sqrt{\frac{K_e K_c}{J_e L}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{J_e R^2}{L K_e K_c}}}$$

Q17 : Modifions le schéma bloc du moteur en décalant le sommateur avec C_r deux blocs à gauche :



Ce qui donne $\boxed{H_{prt}(p) = \frac{R+Lp}{K_c}}$

<u>Q18:</u> Si $\varepsilon_\beta > 0$ le robot va ves la droite d'où un $\Delta\omega_c > 0$ ce qui diminue la vitesse de rotation du moteur gauche et augmente la vitesse de rotation du moteur droit.

β	>0	<0
signe de ε_β	X	X
signe de $\Delta\Omega_c$	X	X
variations de Ω_{mg}	↘	↗
variations de Ω_{md}	↗	↘

<u>Q19:</u> Détermination de $H_1(p) = \frac{\beta(p)}{\Delta\Omega_c(p)}$

$$\beta = \frac{1}{b}\left(\frac{r}{p} \times \frac{K_m}{1+\tau_m p}\left(\Omega_c + \Delta\Omega_c\right) - \frac{r}{p} \times \frac{K_m}{1+\tau_m p}\left(\Omega_c - \Delta\Omega_c\right)\right)$$

$$\beta = \frac{1}{b} \times \frac{2}{p} \times \frac{K_m}{1+\tau_m p}\left(\cancel{\Omega_c} + \Delta\Omega_c - \cancel{\Omega_c} + \Delta\Omega_c\right)$$

$$\beta(p) = \frac{2 r K_m}{b p (1+\tau_m p)} \Delta\Omega_c(p) \Rightarrow \boxed{H_1(p) = \frac{2 r K_m}{b p (1+\tau_m p)}}$$