

Hyperstatisme

Définition

Un mécanisme sera dit hyperstatique si des degrés de liberté ont été supprimés plusieurs fois. Cette surabondance de suppression de degrés de libertés a plusieurs conséquences :

- du point de vue de la résolution analytique, trop d'inconnues existent par rapport au nombre d'équations, rendant ainsi impossible la détermination des inconnues par les méthodes classiques.
- du point de vue des contraintes d'assemblage, le mécanisme sera plus délicat à réaliser car supprimer plusieurs fois un degré de liberté va imposer des contraintes géométriques entre les pièces (parallélisme, distance, coaxialité, ...).
- du point de vue de la rigidité du mécanisme, cette surabondance va rendre le système rigide, ce qui est une qualité souvent recherchée (les machines-outils sont par exemple très hyperstatiques, car on recherche le moins de déformation possible de la structure).
- du point de vue de la fiabilité du mécanisme, un système hyperstatique sera plus tolérant aux dégradations des liaisons, car une autre liaison continuera à supprimer les degrés de liberté nécessaires au fonctionnement du mécanisme.

Par opposition au mécanisme hyperstatique, un mécanisme dans lequel on ne supprime que le nombre de degrés de liberté strictement nécessaire au fonctionnement du système sera dit isostatique.

2.1.2 Exemple

Pour réaliser une liaison pivot, qui supprime 5 degrés de liberté, on peut choisir d'associer en parallèle une liaison rotule et une liaisons linéaire annulaire :

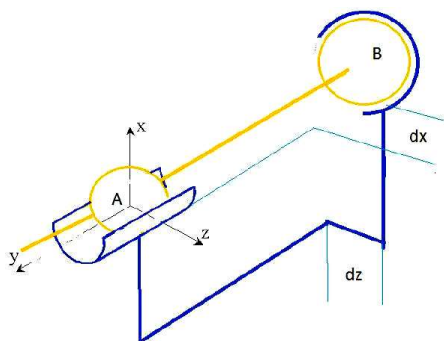


Figure 3 - Exemple 1

Chacune des liaisons contribue à la suppression du nombre juste nécessaire de degrés de libertés :

- la rotule supprime 3 translations ;
- la linéaire annulaire supprime 2 rotations.

Le positionnement de l'ensemble se fait de manière "naturelle", sans contrainte de montage, quelles que soient les positions des centres de liaison A et B.

La liaison est isostatique.

On peut également choisir de réaliser cette liaison pivot par association en parallèle d'une liaison pivot glissant et d'une rotule :

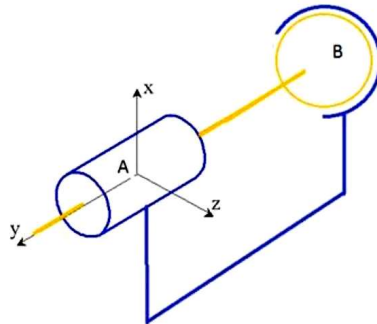


Figure 4 - Exemple 2

La liaison pivot glissant supprime 2 translations (TX et TZ) et 2 rotations (RX et RY).

La liaison rotule supprime la translation TY nécessaire pour réaliser la liaison pivot, mais supprime également 2 translations TX et TY de façon redondante avec la liaison pivot.

Cette liaison est alors hyperstatique de degré 2.

Cet hyperstatisme va générer 2 contraintes de montage, liées aux degrés de libertés redondants : il s'agit du positionnement en X et Y du centre B de la rotule par rapport à l'axe du pivot glissant.

APPROCHE CINEMATIQUE

Chacune des liaisons présentes dans le mécanisme est associée à un torseur cinématique dans lequel les composantes non nulles, inconnues, sont les degrés de liberté de la liaison.

Le nombre de degré de liberté dans une liaison est appelé nombre d'inconnues cinématiques de la liaison.

On notera n_{ci} le nombre d'inconnues cinématiques de la liaison i .

Le nombre total d'inconnues cinématiques vaut alors :

$$N_c = \sum_{i=1}^l n_{ci} \text{ où } l \text{ désigne le nombre de liaisons dans le mécanisme.}$$

Déterminer le nombre d'inconnues cinématiques revient à compter le nombre total de composantes non nulles dans les torseurs cinématiques des liaisons.

Exemple : système bielle-manivelle

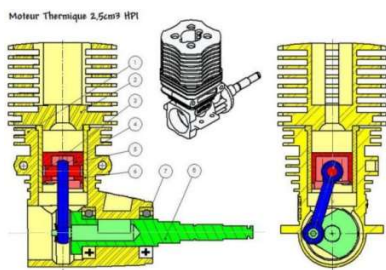


Figure 5 - Moteur de modélisme

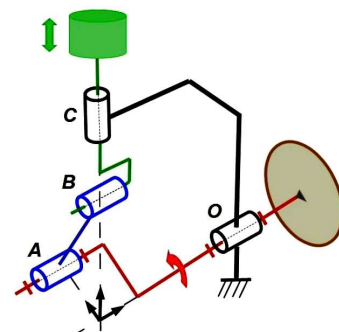


Figure 6 - Schéma cinématique du moteur

Le mécanisme comporte :

- 2 liaisons pivot \mathcal{L}_1 et $\mathcal{L}_2: n_{c1} = n_{c2} = 1$;
- 2 liaisons pivot glissant \mathcal{L}_3 et $\mathcal{L}_4: n_{c3} = n_{c4} = 2$ Le nombre total d'inconnues cinématiques vaut alors :

$$N_c = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$$

Nombre cyclomatique

Rappels sur les chaînes de solide : ouverte, fermée, complexe

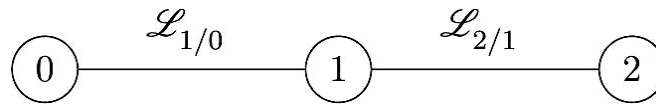
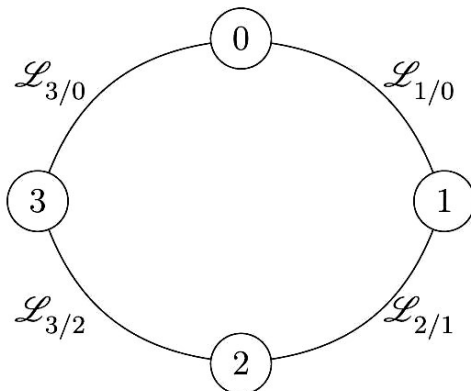
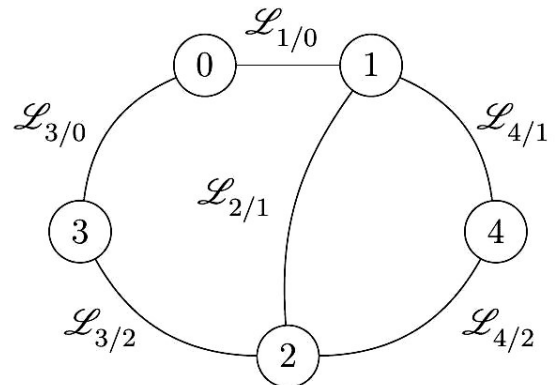


Figure 7 - Chaîne ouverte : aucun cycle

La chaîne de solides est fermée, et il y a 1 cycle



La chaîne fermée est complexe : plus d'un cycle



Nombre cyclomatique

On appelle nombre cyclomatique ν le nombre de chaînes de solides fermées indépendantes dans le mécanisme

Ici $\nu = 1$ sur le graphe de gauche et $\nu = 2$ pour le graphe de droite

Exemple : système bielle-manivelle

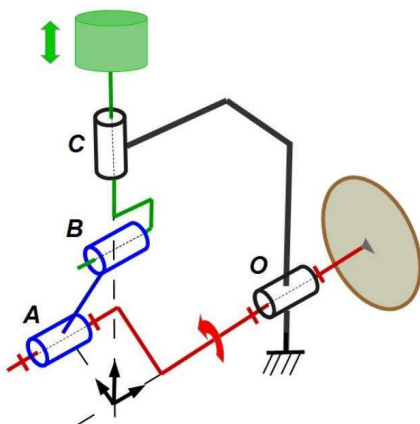
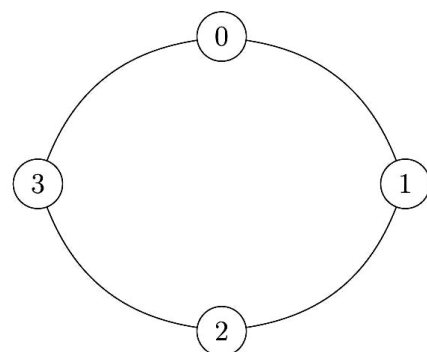


Figure 8 - Schéma cinématique du moteur



Ici $\nu =$

Nombre d'équations cinématiques

Il est possible d'écrire une relation de fermeture cinématique pour chaque chaîne fermée. Or une fermeture cinématique génère 6 équations (3 équations pour les vecteurs rotation, 3 équations pour les vecteurs vitesse).

Sachant qu'il y a ν chaînes fermées, le nombre total d'équations cinématiques E_c a pour expression :

$$E_c = 6\nu$$

Mobilités dans le mécanisme

Définition

Les mobilités dans un mécanisme sont les mouvements possibles entre deux solides. Certains mouvement contribuent à la loi entrée/sortie pour laquelle a été conçu le système, d'autres ne sont pas fonctionnels.

Il existe donc deux types de mobilités :

- les mobilités utiles m_u , qui sont les mouvements indépendants contribuant à la loi entrée/sortie du mécanisme;
- les mobilités internes m_i , qui sont des mouvements autres que les mobilités utiles pouvant subsister même si les mobilités utiles sont bloquées.

Le degré de mobilité m d'un mécanisme est la somme des mobilités utiles et internes :

$$m = m_u + m_i$$

Exemple : pompe à plateau oscillant

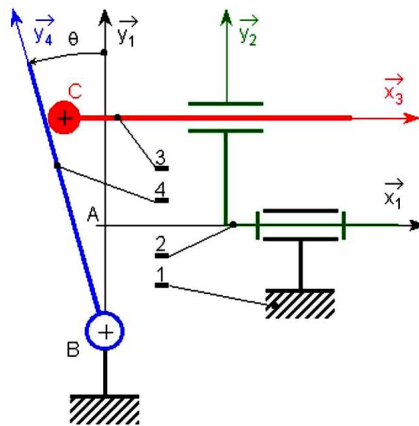


Figure 9 - Schéma cinématique du moteur

Dans le schéma d'une pompe à piston radiaux ci-contre, il existe une mobilité utile : la rotation de l'arbre (2) qui entraîne la translation alternative du piston (3).

Mais il existe également une mobilité interne : la rotation sur lui-même du piston (3).

Dans ce mécanisme, $m = m_u + m_i = 1 + 1 = 2$.

Conséquence sur les équations cinématiques

Lorsqu'une mobilité est présente, elle correspond à un mouvement possible dans le mécanisme qui va s'ajouter aux mouvements possibles des liaisons individuelles.

Le nombre total d'équations de mouvements est alors égal à $E_c + m$.

Exemple : système bielle-manivelle

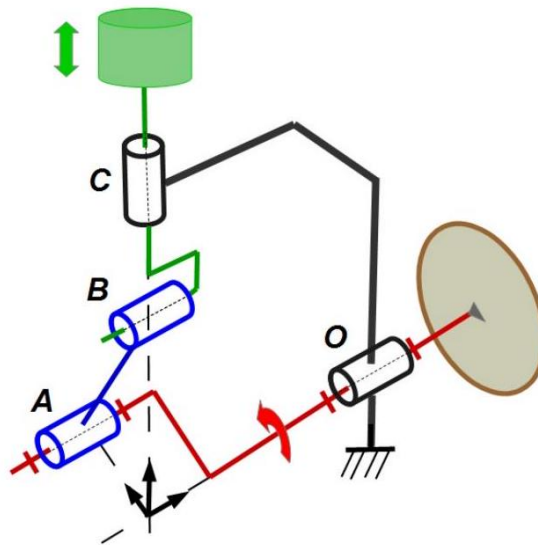


Figure 10 - Schéma cinématique du moteur

La seule mobilité utile est la rotation de l'arbre (1) qui entraîne la translation du piston (3) : $m_u = 1$.

Il n'y a pas de mobilités internes : $m_i = 0$. Le degré de mobilité du mécanisme est donc égal à

$$m = m_i + m_u = 1.$$

Calcul du degré d'hyperstatisme

Définition

Le degré d'hyperstatisme h correspond au nombre d'équations de fermetures cinématiques surabondantes par rapport au nombre d'inconnues cinématiques :

$$h = E_c + m - N_c$$

- si $h > 0$: le mécanisme est hyperstatique
- si $h = 0$: le mécanisme est isostatique
- si $h < 0$: le mécanisme est hypostatique. Ce cas correspond à un mécanisme mal conçu dans lequel il existe plus de mobilités que nécessaire. Ce système ne peut pas être fonctionnel.

Degré d'hyperstatisme

N_c :	inconnues cinématiques (nombre de ddl conservés dans les liaisons)
ν :	nombre cyclomatique (nombre de chaînes fermées)
$E_c = 6\nu$:	nombre d'équations cinématiques
$m = m_u + m_i$:	nombre de mobilités (utiles et internes)
	$h = E_c + m - N_c$

Exemple : système bielle-manivelle

Les paramètres du mécanisme sont $N_c = 6$; $m = 1$; $E_c = 6\nu = 6$.

On déduit $h = E_c + m - N_c = 1$

Le mécanisme est hyperstatique de degré 1. La contrainte géométrique associée est le parallélisme dans le plan lié à (2) entre les axes des pivots \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_3 . Pour rendre le système isostatique, il faudrait par exemple remplacer la liaison pivot \mathcal{L}_3 par une liaison sphérique.

APPROCHE STATIQUE

Un mécanisme est composé de N_s solides liés par des liaisons mécaniques.

Pour chaque solide, en appliquant le PFS on peut écrire 6 équations (3 dues au théorème de la résultante et 3 dues au théorème du moment statique).

D'où le nombre total d'équations $N_e = 6N_s$

Chaque liaison mécanique a un torseur statique avec un nombre de composante. Par exemple le torseur statique d'une liaison pivot a 5 composantes.

On note N_l le nombre total des composantes de toutes les liaisons. On dit aussi qu'on compte le nombre d'efforts et de moments de liaison entre les solides.

$m = m_u + m_i$ est la mobilité définie dans le cas de l'approche cinématique. Chacune de ces mobilité rend inutile l'équation du PFS en relation avec cette mobilité (en effet on aura une équation du type $0=0$).

On a alors un nombre d'équations utiles égal à $6N_s - m$

$h = N_l - (6N_s - m)$ qui donne le nombre d'inconnues de liaison qu'on ne peut pas déterminer avec le PFS

$$\text{Il vient } h = N_l - 6N_s + m$$

Conséquences de l'hyperstatisme

Inconvénients

Lorsqu'un mécanisme est hyperstatique, cela va nécessairement engendrer des contraintes de montage, liées à la nature des degrés d'hyperstatisme. Ces contraintes peuvent être satisfaites de plusieurs façons différentes :

- contraintes géométriques lors de la fabrication des pièces,
- présence de jeu dans les liaisons,
- pièces flexibles autorisant la déformation,
- Reconception du mécanisme en vue de modifier les liaisons afin de rendre ce mécanisme isostatique.

Un système hyperstatique est donc difficile à réaliser.

Inversement, un système isostatique ne présentera aucune contrainte d'assemblage, quels que soient les tolérances de forme et de dimension appliquées sur ses pièces.

Avantages

Les degrés de liberté d'un système isostatique ne sont pas redondants. Or, l'usure d'une liaison va engendrer des libertés de mouvement supplémentaires (par exemple, un jeu dans un guidage en rotation pivot glissant va induire un rotulage; ce rotulage va transformer la liaison pivot glissant en liaison linéaire annulaire).

En conséquence, le mécanisme ne sera plus en mesure de remplir sa fonction.

Inversement, un système hyperstatique sera plus robuste vis-à-vis de la dégradation et de l'usure d'une liaison, car les degrés de liberté redondants vont compenser cette usure.

De même, un degré de liberté étant supprimé plusieurs fois, un mécanisme hyperstatique sera plus rigide qu'un mécanisme isostatique.

L'hyperstatisme sera donc une propriété recherchée lorsque la rigidité du mécanisme est une contrainte fonctionnelle (cas des machine-outils par exemple, pour lesquelles une déformation du mécanisme se traduira par des défauts dimensionnels ou de forme sur les pièces usinées.)

Avantages / Inconvénients

Mécanisme isostatique :

- Avantage : facile à réaliser et à assembler (donc moins cher)
- Inconvénients :

◇ peu rigide

◇ peu robuste face aux défauts des liaisons

Mécanisme hyperstatique :

- Avantages :

◇ rigide

◇ robuste

- Inconvénient : contraintes de réalisation

Exercices

1 : système bielle-manivelle

Pour chacun des systèmes bielle-manivelle proposés ci-dessous, déterminer leur degré d'hyperstatisme et les éventuelles contraintes géométriques associées.

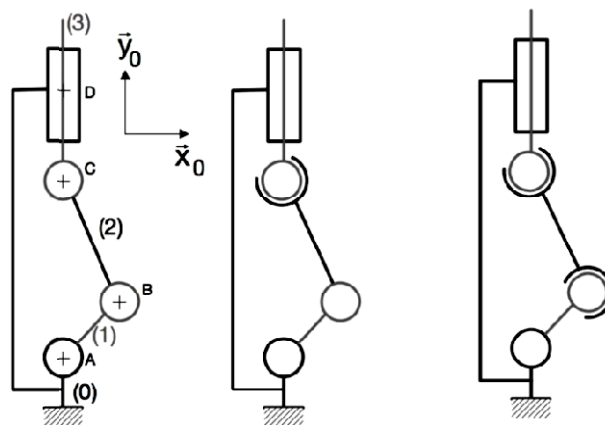


Figure 11 - Plusieurs conceptions de système bielle manivelle

2 : pompe à pistons radiaux

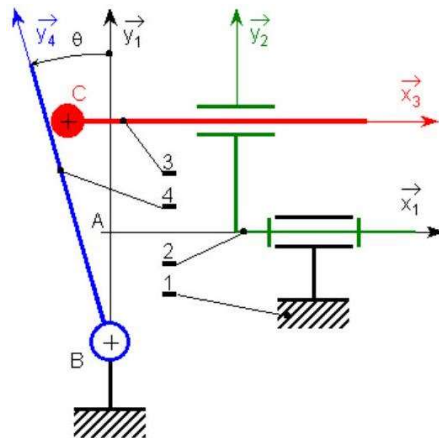
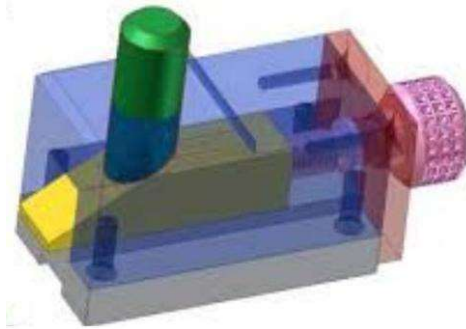


Figure 12 - Pompe à pistons radiaux

Après avoir dessiné et renseigné le graphe des liaisons, déterminer avec les deux approches le degré d'hyperstatisme du mécanisme.

3 : butée réglable



On s'intéresse à une butée réglable, dont le but est de positionner précisément un pion (2) par action sur le bouton moleté (5) (figure 13 ci-dessous).

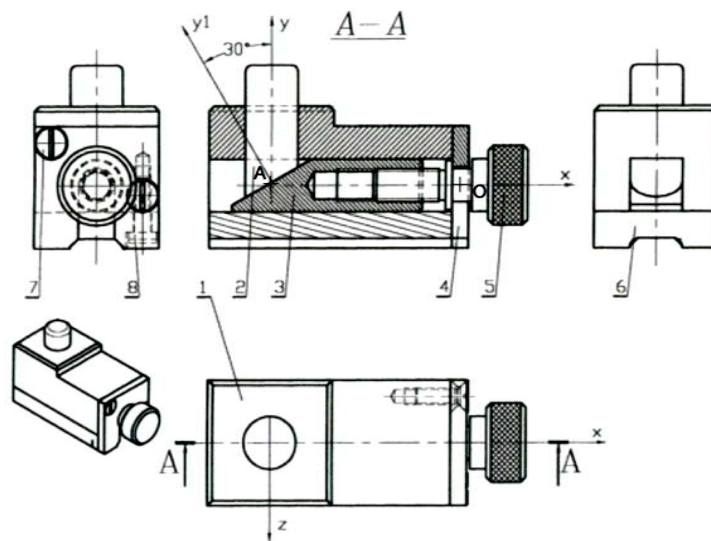


Figure 13 - Dessin d'ensemble de la butée

Après avoir dessiné et renseigné le graphe des liaisons, déterminer avec les deux approches le degré d'hyperstatisme du mécanisme.