



Chapitre 3

Sommes et produits

Mathématiques avec M. Cacitti

PCSI du lycée Paul Eluard de Saint-Denis

Année scolaire 2026-2027

1 Sommes et produits

Définition 1 : Somme

Soient p et q deux entiers tels que $p \leq q$, et $a_p, a_{p+1} \dots, a_q$ des nombres réels (ou complexes). La **somme** $a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$ est notée $\sum_{i=p}^q a_i$:

$$\sum_{i=p}^q a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q.$$

De plus :

- p et q sont appelés les bornes de la **somme** ;
- pour $i \in \llbracket p, q \rrbracket$, le nombre a_i est appelé le **terme d'indice i** .

Remarques.

- Dans $\sum_{i=p}^q a_i$, la variable i est muette. Autrement dit, elle peut être remplacée n'importe quelle autre variable non déjà utilisée : $\sum_{i=p}^q a_i = \sum_{k=p}^q a_k$.
- Nous n'utiliserons pas la variable i s'il s'agit d'une somme de nombres complexes.
- Dans la somme $\sum_{i=p}^q a_i$, il y a $q - p + 1$ termes.
- Plus généralement, pour I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels (ou complexes), on note $\sum_{i \in I} a_i$ la somme des a_i pour $i \in I$.
- Si $I = \emptyset$ alors, par convention, $\sum_{i \in I} a_i = 0$.

Exemples.

- $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ termes}} = \sum_{k=1}^n 1$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = \sum_{k=0}^n (2k + 1)$.
- $\sum_{k=3}^7 k = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$ et $\sum_{k=7}^3 k = 0$.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique de raison 2 et de premier terme 4 et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de raison 4 et de premier terme 2. Ecrire en symbolique la somme des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Faire de même avec la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples. Développer et calculer les sommes suivants.

1. $\sum_{k=2}^5 k$

2. $\sum_{k=0}^4 2^k$

3. $\sum_{k=2}^4 (-1)^k k^2$

4. $\sum_{k=1}^7 1$

Définition 2 : Produit

Soient p et q deux entiers tels que $p \leq q$, et $a_p, a_{p+1} \dots, a_q$ des nombres réels (ou complexes). Le **produit** $a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_q$ est noté $\prod_{i=p}^q a_i$:

$$\prod_{i=p}^q a_i = a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_q.$$

Remarque. Si $I = \emptyset$ alors, par convention, $\prod_{k \in I} a_k = 1$.

Exemples.

$$\bullet \prod_{k=2}^5 k = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \text{ et } \prod_{k=5}^2 k = 1.$$

$$\bullet \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^*, 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n = \prod_{k=1}^n 2k \text{ et également}$$

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots \times (2 \times n) = 2^n \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = 2^n \prod_{k=1}^n k.$$

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison 3 et de premier terme 5, et $m \in \mathbb{N}$. Donner l'expression simplifiée du produit des m premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 1 : Relation de Chasles

Soient p et q deux entiers tels que $p \leq q$ et $a_p, \dots, a_q \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $r \in \llbracket p, q \rrbracket$,

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^r a_k + \sum_{k=r+1}^q a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^q a_k = \prod_{k=p}^r a_k \times \prod_{k=r+1}^q a_k.$$

Démonstration. On passe par les écritures en extension.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n} k &= \sum_{k=0}^{2n} k - \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n(4n+2-n+1)}{2} \\ &= \frac{n(3n+3)}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $\prod_{k=n}^{3n} 2^k$.

Proposition 2 : Linéarité de la somme

Soient p et q deux entiers tels que $p \leq q$ et $a_p, \dots, a_q, b_p, \dots, b_q, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=p}^q (a_k + b_k) &= \sum_{k=p}^q a_k + \sum_{k=p}^q b_k; \\ \bullet \sum_{k=p}^q (\lambda a_k) &= \lambda \sum_{k=p}^q a_k; \\ \bullet \sum_{k=p}^q (\lambda a_k + \mu b_k) &= \lambda \sum_{k=p}^q a_k + \mu \sum_{k=p}^q b_k. \end{aligned}$$

Démonstration. On passe par l'écriture en extension.

Remarques.

- Les sommes doivent porter sur les mêmes indices pour pouvoir appliquer la proposition précédente.
- Les résultats similaires pour le produit sont :

$$\begin{aligned} \star \prod_{k=p}^q (a_k b_k) &= \prod_{k=p}^q a_k \times \prod_{k=p}^q b_k; \\ \star \prod_{k=p}^q (\lambda a_k) &= \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^q a_k; \end{aligned}$$

$$\star \prod_{k=p}^q \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=p}^q a_k}{\prod_{k=p}^q b_k} \text{ si } b_k \neq 0 \text{ pour tout } k \in \llbracket p, q \rrbracket.$$

Exemple. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \sum_{k=1}^n (3k+4)(a+2) &= 3(a+2) \sum_{k=1}^n k + 4(a+2) \sum_{k=1}^n 1 \text{ par linéarité de la somme} \\ &= 3(a+2) \frac{n(n+1)}{2} + 4(a+2)n \\ &= (a+2)n \left(\frac{3(n+1)}{2} + 4 \right) \\ &= (a+2)n \frac{3n+11}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de $\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n ki \right)$.

2 Changements d'indice et regroupements de termes

Proposition 3 : Changements d'indice

Soient p et q deux entiers, $a_p, \dots, a_q$ et $m \in \mathbb{Z}$.

- Le **changement d'indice par translation** est $j = k + m$:

$$\sum_{k=p}^q a_{k+m} = \sum_{j=p+m}^{q+m} a_j.$$

- Le **changement d'indice par retournement** est $j = m - k$:

$$\sum_{k=p}^q a_{m-k} = \sum_{j=m-q}^{m-p} a_j.$$

Démonstration. On passe par l'écriture en extension.

Remarque. Il est interdit de « sauter » des indices. Par exemple de poser $k = 2i$ ce qui reviendrait à ne prendre que les termes pairs.

Exemple. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^n (k-1)$. Alors :

- par changement d'indice $j = k - 1$, $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}$;
- par linéarité $S_n = \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n+1) - 2n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer, par changement d'indice, $\sum_{j=0}^n 4^{n-j}$.

Proposition 4 : Regroupement des indices pairs et impairs

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_{2n} \in \mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{j=0}^n a_{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1}.$$

Démonstration. On passe par l'écriture en extension.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \sum_{k=0}^{2n} k(-1)^k &= \sum_{k=0}^n 2k(-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)(-1)^{2k+1} \\ &= 2 \sum_{k=0}^n k - 2 \sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \text{ par linéarité} \\ &= 2 \left(\sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^{n-1} k \right) - n \\ &= 2n - n \\ &= n. \end{aligned}$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{2n} (2k+1)(-1)^k$.

3 Sommes et produits télescopiques

Proposition 5 : Somme télescopique

Soient p et q deux entiers tels que $p \leq q$ et $a_p, \dots, a_q, a_{q+1} \in \mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p.$$

Démonstration. On utilise la linéarité de la somme, un changement d'indice et deux relations de Chasles pour faire apparaître deux sommes qui se simplifient.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{k+1-k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \text{ par somme télescopique.} \end{aligned}$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression simplifiée de $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ en fonction de n .

Corollaire 1 : Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$. Alors

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. On part du terme de droite et on fait apparaître une somme télescopique.

Exemples. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Alors :

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
- $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

Exercice 8.

1. Calculer $a^5 - b^5$ pour $a, b \in \mathbb{C}$.
2. En déduire une première étape de factorisation de $x^5 - 1$ pour $x \in \mathbb{C}$.

Proposition 6 : Produit télescopique

Soient p et q deux entiers tels que $p \leq q$ et $a_p, \dots, a_q, a_{q+1} \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\prod_{k=p}^q \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}.$$

Démonstration. On adapte la démonstration de la somme télescopique ou on utilise la fonction $\ln$ qui transforme les produits en sommes et les fractions en soustractions.

Exemple. Soit $n \geq 2$ entier. Alors, par produit télescopique, $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ et le produit des nombres impairs de 1 à $2n+1$.

4 Sommes et produits particuliers

Proposition 7 : Somme de terme général constant

Soient p et q deux entiers tels que $p \leq q$, et $a \in \mathbb{C}$. Alors $\sum_{k=p}^q a = (q - p + 1)a$.

Démonstration. On passe par l'écriture en extension $a + a + \dots + a$.

Remarque. Autrement dit, il s'agit du nombre de termes multiplié par la constante a .

Exemple. $\sum_{k=4}^{14} 5 = (14 - 4 + 1) \times 5 = 11 \times 5 = 55$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=1}^n n$.

Proposition 8 : Produit de terme général constant

Soient p et q deux entiers tels que $p \leq q$, et $a \in \mathbb{C}$. Alors $\prod_{k=p}^q a = a^{q-p+1}$.

Démonstration. On passe par l'écriture en extension $a \times a \times \dots \times a$.

Remarque. Autrement dit, il s'agit de la constante a à la puissance le nombre de termes.

Exemple. $\prod_{k=3}^7 4 = 4^{7-3+1} = 4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024$.

Exercice 11. Calculer $\prod_{k=1}^{31} (-2)$.

Proposition 9 : Somme des premiers entiers et des premiers carrés

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \bullet \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Exemples.

- $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100(100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$
- $1 + 4 + 9 + \cdots + 100 = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10(10+1)(2 \times 10 + 1)}{6} = 5 \times 11 \times 7 = 5 \times 77 = 385$

Exercice 12. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Proposition 10 : Somme géométrique

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Démonstration. On procède par disjonction de cas.

- Pour $x = 1$, le calcul est direct.
- Pour $x \neq 1$, on calcule $(1-x) \sum_{k=0}^n x^k$ par somme télescopique.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$.

Remarque. De façon générale, pour p et q deux entiers tels que $p \leq q$, et $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=p}^q x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x} = x^p \frac{1-x^{q+1-p}}{1-x}.$$

Autrement dit :

- « $\frac{\text{premier terme écrit} - \text{premier terme non écrit ou oublié}}{1 - \text{raison}}$ » ;
- « premier terme écrit $\times \frac{1 - x^{\text{nombre de termes}}}{1-x}$ »

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{k=n}^{2n} 3^k = \frac{3^n - 3^{2n+1}}{1-3} = 3^n \frac{3^{n+1} - 1}{2}$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de la suite $\left(\sum_{k=4}^n \frac{2^k}{3^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

5 Binôme de Newton

Définition 3 : Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. La **factorielle de n** est

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Exemples.

- $0! = 1$;
- $1! = 1$;
- $2! = 2$;
- $3! = 6$;
- $4! = 24$;
- $5! = 120$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $6!$, $\frac{n!}{n}$ et $\frac{(n+1)!}{6!}$.

Définition 4 : Coefficients binomiaux

Soient $k, n \in \mathbb{Z}$. Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ est défini par :

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$;
- $\binom{n}{k} = 0$ si $n < 0$ ou $k \notin \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exemples.

- $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1$;
- $\binom{1}{0} = 1 = \frac{1}{1}$;
- $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{n-1} = n$ et $\binom{n}{n} = 1$.

Exercice 16. Calculer $\binom{8}{4}$ et $\binom{9}{3}$.

Proposition 11 : Formule de Pascal

Soient $n, k \in \mathbb{Z}$ non tous nuls. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Remarque. La formule de Pascal est utile pour représenter les différents coefficients binomiaux sous la forme du **triangle de Pascal**.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & k=0 \\ & & & & & & 1 & k=1 \\ n=0 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & k=2 \\ n=1 & & & & & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & k=3 \\ n=2 & & & & & & & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & k=4 \\ n=3 & & & & & & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & k=5 \\ n=4 & & & & & & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ n=5 & & & & & & & \end{array}$$

Démonstration. On part du terme de droite et on utilise la définition des coefficients binomiaux avec les factorielles.

Exemple. $\binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{9}{5}$

Exercice 17. Calculer, grâce à la formule de Pascal ou au triangle de Pascal, $\binom{0}{7}, \binom{1}{7}, \dots, \binom{7}{7}$.

Proposition 12 : Propriétés des coefficients binomiaux

Soient $n, k \in \mathbb{Z}$. Alors :

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ appelée **propriété de symétrie** ;
- $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration. On utilise la définition des coefficients binomiaux avec les factorielles.

Remarque. Autrement dit pour la propriété de symétrie, le triangle de Pascal possède une symétrie axiale verticale.

Exemples.

- $\binom{8}{6} = \binom{8}{8-6} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$
- $\binom{8}{6} = \frac{8}{6} \binom{7}{5} = \frac{8}{6} \times \frac{7}{5} \binom{6}{4} = \frac{8}{6} \times \frac{7}{5} \times \frac{6}{4} \binom{5}{3} = \dots = \frac{8}{6} \times \frac{7}{5} \times \dots \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{56}{2} = 28$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les coefficients binomiaux suivants.

1. $\binom{n}{n-2}$

2. $\binom{2n}{n}$

Proposition 13 : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Exemples.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
 (1 + x)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \\
 &= \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n \\
 &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots + nx^{n-1} + x^n.
 \end{aligned}$$
- Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Alors $\mathbb{E}(X) = np$.

$$\begin{aligned}
\text{En effet : } \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} \text{ par changement d'indice } j = k-1 \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} \\
&= np(p+1-p)^{n-1} \text{ par formule du binôme de Newton} \\
&= np.
\end{aligned}$$

Exercice 19. Donner, grâce à la formule du binôme de Newton, les identités remarquables suivantes pour $a, b \in \mathbb{C}$.

1. $(a+b)^2$

2. $(a+b)^3$

3. $(a+b)^4$

4. $(a+b)^5$

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

6 Sommes doubles

Proposition 14 : Somme double

Soient I et J deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ une famille de nombres réels (ou complexes). Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right).$$

Démonstration. On passe par l'écriture en extension.

Exemple. On considère la famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4}$ définie par le tableau de valeurs suivant.

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	1	0	2	0
3	35	32	34	35

Alors, que l'on fasse la somme :

- d'abord ligne par ligne puis le total ;
- d'abord colonne par colonne puis le total ;
- ou de toutes les cases en même temps,

le résultat sera le même : 140.

Exercice 21. Déterminer la limite de la suite $\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{2^{ij}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

Corollaire 2 : Variables séparables

Soient I et J deux ensembles finis et $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles de nombres réels (ou complexes). Alors

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \sum_{i \in I, j \in J} a_i b_j = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_i b_j = \left(\sum_{j \in J} b_j \right) \left(\sum_{i \in I} a_i \right).$$

Démonstration. On utilise la linéarité de la somme et la proposition précédente.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n n = n \times n = n^2$.

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j$.

Remarque. Attention, en général, $\sum_{i \in I} a_i b_i \neq \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{i \in I} b_i \right)$. Autrement dit, la somme des produits n'est pas le produit des sommes : en général $ab + cd \neq (a + c)(b + d)$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Exemple. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 &= \sum_{k, \ell=1}^n a_k a_\ell \\ &= \sum_{\substack{k, \ell=1 \\ k < \ell}}^n a_k a_\ell + \sum_{\substack{k, \ell=1 \\ k = \ell}}^n a_k a_\ell + \sum_{\substack{k, \ell=1 \\ k > \ell}}^n a_k a_\ell \text{ par sommation par paquets} \\ &= \sum_{\substack{k, \ell=1 \\ k < \ell}}^n a_k a_\ell + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{\substack{k, \ell=1 \\ \ell > k}}^n a_\ell a_k \text{ par changement d'indices} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{\substack{k, \ell=1 \\ k < \ell}}^n a_k a_\ell \\ &\neq \sum_{k=1}^n a_k^2 \text{ en général.} \end{aligned}$$

Par exemple $(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3$.

Exercice 23. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_i = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $b_i = 2$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \neq \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Proposition 15 : Somme triangulaire

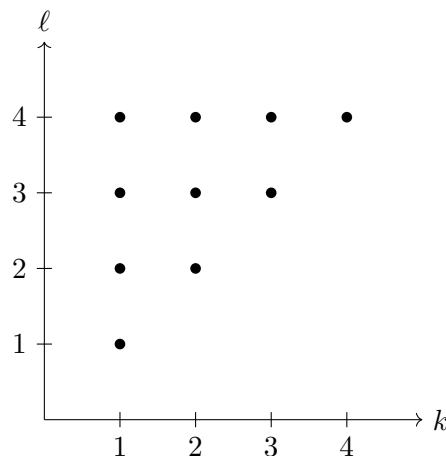
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{k, \ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ une famille de réels (ou de complexes). Alors

$$\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} a_{k, \ell} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=k}^n a_{k, \ell} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} a_{k, \ell}.$$

Démonstration. On sépare l'ensemble $\{(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \leq \ell\}$ de deux manières différentes.

Remarques.

- Dans une somme triangulaire, il est parfois plus simple de d'abord sommer par rapport à l'une des variables plutôt que l'autre.
- Le terme « triangulaire » s'explique grâce aux points suivants de coordonnées (k, ℓ) pour k, ℓ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $k \leq \ell$.



Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} i &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j i \text{ par somme triangulaire} \\
 &= \sum_{j=0}^n \frac{j(j+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n j \text{ par linéarité de la somme} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{2n+1}{3} + 1 \right) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.
 \end{aligned}$$

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j+1}$.

7 Exercices

7.1 Sommes

Exercice 25. Soient $n \geq 5$ entier et $a, b \in \mathbb{R}$. Ecrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{1}{e^2} + \frac{2^2}{e^3} + \cdots + \frac{n^2}{e^{n+1}}$ | 5. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$ |
| 2. $1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + a^{2n} - a^{2n+1}$ | 6. $2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{12}$ |
| 3. $a^n b + \frac{a^{n-1} b^2}{2} + \cdots + \frac{a b^n}{n} + \frac{b^{n+1}}{n+1}$ | 7. $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots 50$ |
| 4. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ | 8. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024}$ |

Exercice 26. Développer et calculer les sommes suivantes.

- | | | | |
|-------------------------|-----------------------|----------------------------------|-----------------------|
| 1. $\sum_{k=0}^3 (k+2)$ | 2. $\sum_{i=2}^3 i^2$ | 3. $\sum_{\ell=1}^4 (2\ell - 1)$ | 4. $\sum_{k=0}^3 3^k$ |
|-------------------------|-----------------------|----------------------------------|-----------------------|

Exercice 27. Soient $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier.

- | | |
|--|---|
| 1. $\sum_{k=1}^n (\alpha + a_k) = \alpha + \sum_{i=1}^n a_i$ | 2. $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{j=1}^n b_j$ |
|--|---|

$$3. \sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k$$

$$5. \sum_{k=1}^n a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$$

$$4. \sum_{k=1}^n a_k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^\alpha$$

Exercice 28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes et les écrire sous forme factorisée.

$$1. \sum_{\ell=0}^{3n} 2(\ell-1)$$

$$2. \sum_{k=1}^n (3k+n-1)$$

$$3. \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n} \right)$$

$$4. \sum_{k=2}^n k(1-k)$$

Exercice 29. Soient $n \geq 2$ entier et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes.

$$1. \sum_{k=0}^{n^2} \frac{1}{2^k}$$

$$4. \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3} \right)^{k+1}$$

$$7. \sum_{p=2}^{n^2} (3p + 2^{p+1})$$

$$2. \sum_{k=2}^n 3k$$

$$5. \sum_{k=1}^n \frac{6}{2^k}$$

$$8. \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$$

$$3. \sum_{k=0}^n (2k+1)$$

$$6. \sum_{k=1}^{n-1} x^k$$

$$9. \sum_{k=2}^{n+2} \frac{(1-x)^{k+1}}{2^{k-1}}$$

Exercice 30. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = 2u_n + b^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression explicite du terme général de cette suite.

Exercice 31. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

7.2 Changements d'indice et regroupements de termes

Exercice 32. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

$$1. \sum_{j=0}^n ((j+2)^3 - j^3)$$

$$2. \sum_{k=0}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k})$$

Exercice 33. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=0}^n k 2^k$.

1. A partir d'un changement d'indice, déterminer une relation de S_n en fonction de S_n et n .
2. En déduire une expression explicite de S_n .
3. Vérifier la formule pour $n = 3$.

Exercice 34. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

$$1. \sum_{k=0}^{2n} k^2 + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$$

$$2. \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (2k+1)$$

$$3. \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2 + (-1)^k}$$

Exercice 35. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si le reste de la division euclidienne de n par 4 est :

- 0 alors $u_n = 1$;
- 1 alors $u_n = 2$;
- 2 alors $u_n = 4$;
- 3 alors $u_n = 8$.

Calculer $\sum_{k=0}^{4n} u_k$.

7.3 Sommes télescopiques et factorisation

Exercice 36. Soient $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$ et $T_n = \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$. En calculant T_n de deux façons différentes, retrouver la formule associée à S_n .

Exercice 37. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes $\sum_{k=1}^n k \times k!$ et $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 38. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Factoriser $a^3 + b^3$ et $a^5 + b^5$ par $a + b$.
2. Factoriser $a^{2m+1} + b^{2m+1}$ par $a + b$.

Exercice 39. Soit $n \geq 2$ entier. Calculer les sommes suivantes.

$$1. \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \quad 2. \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \quad 3. \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \quad 4. \sum_{k=0}^n k \times k!$$

Exercice 40. On considère $S = \sum_{k=1}^{25} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}$.
2. Pour $n \geq 2$ entier, en déduire un encadrement de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.
3. Déterminer la partie entière du nombre S .

7.4 Sommes doubles

Exercice 41. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes.

$$\begin{array}{llll} 1. \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) & 3. \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} & 5. \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) & 7. \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} \binom{i}{j} \\ 2. \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) & 4. \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{j+1} & 6. \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} & 8. \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i} \end{array}$$

On rappelle que, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\min(i, j) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ j & \text{si } i > j \end{cases}$

Exercice 42. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. En employant une somme double, calculer $\sum_{k=1}^n kq^k$.

Exercice 43. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^{2i} (i+j)$.

7.5 Produits

Exercice 44. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier.

$$\begin{array}{l} 1. \prod_{k=1}^n (\alpha a_k) = \alpha \prod_{k=1}^n a_k \\ 2. \prod_{k=1}^n a_k b_k = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \left(\prod_{k=1}^n b_k \right) \\ 3. \prod_{k=1}^n (a_k + b_k) = \prod_{k=1}^n a_k + \prod_{k=1}^n b_k \end{array}$$

Exercice 45. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les produits suivants.

$$1. \prod_{k=1}^n (k+n) \quad 2. \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1} \quad 3. \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \quad 4. \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij \quad 5. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Exercice 46. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n+1)!)^n$.

Exercice 47. Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{(2^k)})$ et $Q_n = (1-a)P_n$.

1. Calculer Q_0, Q_1 et Q_2 .
2. Déterminer la valeur de Q_n .
3. On suppose que $a \neq 1$. En déduire la valeur de P_n .

Exercice 48. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants.

$$1. \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \quad 2. \prod_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$

Exercice 49. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit $\prod_{k=1}^n \frac{k^2 + 2k}{k^2 + 3k + 2}$.

7.6 Factorielles et binôme de Newton

Exercice 50. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} u_n$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}.$$

Exercice 51. Calculer les coefficients binomiaux suivants.

$$1. \binom{9}{4} \quad 2. \binom{10}{3} \quad 3. \binom{10}{6} \quad 4. \binom{9}{6} \quad 5. \binom{5}{2} \quad 6. \binom{7}{3} \quad 7. \binom{10}{4} \quad 8. \binom{12}{4}$$

Exercice 52. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes.

$$1. \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \quad 3. \sum_{i=2}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i \quad 5. \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} \quad 7. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) \\ 2. \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p \quad 4. \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \quad 6. \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k x^{n-k} \quad 8. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2$$

Exercice 53. Soient m et n des entiers tels que $0 \leq m \leq n$.

$$1. \text{ Montrer que } \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \quad 2. \text{ Simplifier } \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}.$$

Exercice 54. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{n}$.

1. Donner, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de l'image $f_n(x)$ sans le symbole $\sum$.
2. Dériver la fonction f_n sous ces deux formes pour calculer $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k}$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la fonction f_n , en utilisant les propriétés des coefficients binomiaux.
4. Montrer que $k^2 = k(k-1) + k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} \binom{n}{k}$.

Table des matières

1	Sommes et produits	2
2	Changements d'indice et regroupements de termes	4
3	Sommes et produits télescopiques	5
4	Sommes et produits particuliers	6
5	Binôme de Newton	7
6	Sommes doubles	10
7	Exercices	12

Programme officiel de ce chapitre

Contenus	Capacités et commentaires
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels	Notations $\sum_{i \in I} a_i, \sum_{i=1}^n a_i, \prod_{i \in I} a_i, \prod_{i=1}^n a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^n k, \sum_{k=1}^n k^2, \sum_{k=0}^n x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.
Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	