

Chapitre 3 Sommes et produits

- ① Sommes et produits.
- ② Changements d'indice et regroupements de termes.
- ③ Sommes et produits télescopiques.
- ④ Sommes et produits particuliers.
- ⑤ Binôme de Newton.
- ⑥ Sommes doubles.

3.1 Sommes

Somme.

$$\sum_{k=p}^q a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{q-1} + a_q$$

L'indice k est muet.

Exemples.

Exercice 1.

Exemples à compléter.

3.1 Produits

Produit.

$$\prod_{k=p}^q a_k = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_{q-1} \times a_q$$

Exemples.

Exercice.

3.1 Sommes et produits

Relation de Chasles.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 3.

3.1 Sommes et produits

Linéarité de la somme.

Démonstration.

Attention les indices et les bornes doivent être les mêmes.

Attention aux formules analogues pour le produit.

Exemple.

Exercice 4.

Exercice 25 (1 et 2).

Exercice 26 (1 et 2).

Exercice 44.

3.2 Changements d'indice

Changements d'indice par translation ou par retournement.

Démonstration.

Attention certains changements de variables ne sont pas licites
comme $k = 2\ell$.

Exemple.

Exercice 5.

3.2 Regroupements de termes

Regroupement des indices pairs et impairs.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 6.

3.3 Sommes télescopiques

Somme télescopique.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 7.

3.3 Sommes télescopiques

Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

Démonstration.

Exemples pour $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$.

Exercice 8.

3.3 Produits télescopiques

Produit télescopique.

Exemple.

Exercice 9.

3.4 Sommes et produits particuliers

Somme de terme général constant.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 10.

Produit de terme général constant.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 11.

3.4 Sommes et produits particuliers

Somme des premiers entiers et des premiers carrés.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration.

Exemples.

Exercice 12.

3.4 Sommes et produits particuliers

Somme géométrique.

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ si } x \neq 1.$$

$$\sum_{k=0}^n x^k = n + 1 \text{ si } x = 1.$$

Démonstration.

Exemple.

Exercice 13.

3.4 Sommes et produits particuliers

De façon générale :

$$\sum_{k=p}^q x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1 - x} = x^p \frac{1 - x^{q+1-p}}{1 - x}$$

Exemple.

Exercice 14.

Exercice 32.

Exercice 33.

Exercice 36.

Exercice 45.

3.5 Binôme de Newton

Factorielle de n .

Exemples.

Exercice 15.

3.5 Binôme de Newton

Coefficients binomiaux.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \times 1} \text{ si } 0 \leq k \leq n.$$

Exemples.

Exercice 16.

3.5 Binôme de Newton

Formule de Pascal.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ si } (k, n) \neq (0, 0).$$

Cette formule permet de construire le triangle de Pascal.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 17.

3.5 Binôme de Newton

Propriétés des coefficients binomiaux.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad ; \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Démonstration.

Le triangle de Pascal présente une symétrie axiale verticale.

Exemples.

Exercice 18.

3.5 Binôme de Newton

Formule du binôme de Newton.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration.

Exemples.

Exercices 19 et 20.

Exercice 52.

Exercice 54.

3.6 Sommes doubles

Somme double.

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

Démonstration.

Exemple.

Exercice 21.

Variables séparables.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 22.

Attention $\sum_{i \in I} a_i b_i \neq \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{i \in I} b_i \right).$

Exemple.

Exercice 23.

Somme triangulaire.

$$\sum_{1 \leq k, \ell \leq n} a_{k, \ell} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=k}^n a_{k, \ell} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} a_{k, \ell}$$

Démonstration.

On peut le voir avec les points dans un repère.

Exemple.

Exercice 24.

Exercice 41.