

- La durée du devoir est de 4 heures.
 - Les calculatrices ne sont pas autorisées.
 - Les exercices sont indépendants. Il n'est pas obligatoire de les traiter dans l'ordre mais il faut bien numéroter vos exercices et vos réponses.
 - Le candidat attachera la plus grande importance aux justifications, à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
 - Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
-

Exercice 1 - Etude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + \frac{1}{2^n}$.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
(b) Réécrire le résultat précédent avec des quantificateurs.
(c) Pour une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque, est-ce suffisant de ne pas être majorée pour diverger vers $+\infty$?
4. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.
(b) Réécrire le résultat précédent avec des quantificateurs.
(c) Pour une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque, est-ce suffisant d'être minorée pour converger ?

Exercice 2 - Résolution d'un système

On considère $a \in \mathbb{R}$ et le système, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 3y + az = 7. \end{cases}$$

Résoudre le système dans les cas suivants.

5. Lorsque $a = 1$.
6. Lorsque $a = 0$.
7. Dans le cas presque général où $a \neq 0$.

Exercice 3 - Raisonnements sur une fonction

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

8. Ecrire avec des quantificateurs : la fonction f est paire.
9. Retranscrire la phrase : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 10$.
10. Retranscrire la phrase : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
11. Montrer que si la fonction f est impaire alors $f(0) = 0$.
12. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x)^2 + f(y)^2 = 0$ si et seulement si $f(x) = f(y) = 0$.

Exercice 4 - Arithmétique

Pour $x \in [0, 1]$, x est un nombre décimal s'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$.

13. Montrer, par l'absurde, que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Exercice 5 - Etude d'un ensemble de fonctions

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions paires $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire vérifiant la propriété.
- (a) Déterminer $f(0)$.
 - (b) Déterminer l'expression de la fonction f .
15. Conclure.

Exercice 6 - Calculs de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{2k+2}$
2. $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$
3. $\prod_{k=1}^n \frac{k^2 + 4k + 3}{k^2 + 4k + 4}$
4. $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}$
5. $\sum_{0 \leq p \leq q \leq n} \binom{n}{p} 2^q$