

Programme de khôlle 2 du 21 au 25 septembre

Une khôlle de mathématiques en PCSI se déroule de la façon suivante.

- L'écriture de l'énoncé d'une définition ou d'un résultat du cours.
- La réalisation de la démonstration d'un résultat ou d'un exercice du cours.
- Un ou deux exercices choisis par le khôlleur.
- La note n'évalue pas le candidat, mais sa prestation.
- La note maximale autorisée est 20. La note minimale autorisée est 0. Un maximum et minimum sont atteints.
- « Refaire » ne veut pas dire « recracher » sans comprendre. Rien n'interdit quelques instants de réflexion si besoin car ce n'est pas du par cœur.
- Si le cours ou les éléments exigibles ne sont pas sus alors la note est inférieure à 8. La réciproque est fausse.
- Une khôlle n'est pas optionnelle. L'absence à la khôlle correspond à une prestation nulle : 0/20. En cas de problème majeur, la khôlle pourra éventuellement être rattrapée ou échanger avec un étudiant d'un autre groupe.

Définitions et résultats du cours exigibles :

- Lois de De Morgan.
- Contraposée, réciproque et négation d'implications.
- Changements d'indice (par translation ou par retournement)
- Regroupement des indices pairs et impairs.
- Somme télescopique
- Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$
- Produit télescopique
- Somme et produit de terme général constant
- Somme des premiers entiers et des premiers carrés
- Somme géométrique
- Formule de Pascal
- Binôme de Newton
- Echange dans une somme triangulaire

Démonstrations du cours exigibles :

- Une des deux lois de Morgan.
- Distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ ou de $\vee$ sur $\wedge$.
- Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
- Sommes des premiers entiers ou des premiers carrés par récurrence.
- Somme géométrique.
- **Binôme de Newton.**

Exercices du cours exigibles :

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est (im)pair si et seulement si n^2 est (im)pair.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^{-x}$ alors la fonction f vérifie l'équation différentielle $y' = -y$. Etude de la réciproque.
- Montrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.
- Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.

- Détermination de l'expression explicite d'une suite récurrente d'ordre 1 par récurrence, d'ordre 2 par récurrence double ou d'ordre n par récurrence forte.
- Résolution d'un système linéaire à deux ou trois inconnues par la méthode du pivot (avec éventuellement un paramètre).
- Détermination de l'intersection entre des droites du plan ou entre des plans de l'espace (à partir de leurs équations).
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- Simplifier l'expression $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Calcul de la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Calcul de la somme $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Contenu du cours abordé dans les exercices du khôlleur :

- Chapitre 1 : Rudiments de logique
 - Propositions, équivalences et négations
 - Conjonctions et disjonctions
 - Implications
 - Quantificateurs
 - Différents modes de raisonnement (direct, contraposée, absurde, équivalences successives, double implication, analyse-synthèse, disjonction des cas, récurrence simple, récurrence double et récurrence forte)
- Chapitre 2 : Systèmes linéaires
 - Systèmes linéaires à deux inconnues (lien avec les droites du plan)
 - Systèmes linéaires à trois inconnues (lien avec les plans de l'espace)
 - Méthode du pivot
- Chapitre 3 : Sommes et produits
 - Définitions et premières propriétés
 - Changements d'indice (translation et retournement) et regroupements de termes (pairs et impairs)
 - Sommes et produits télescopiques
 - Sommes particulières (terme constant, entiers consécutifs, carrés consécutifs, géométriques)
 - Binôme (factorielle, coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton)
 - Sommes doubles (rectangulaires et triangulaires)