

Total des points : 31 points

Exercice 1 - Etude d'une suite (7 points)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n.$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + \frac{1}{2^n}$.

Réponse : On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n) : u_n = 2^n + \frac{1}{2^n}$.

- Initialisation :

Pour $n = 0$: $2^0 + \frac{1}{2^0} = 1 + 1 = 2 = u_0$, d'où $P(0)$ est vraie.

Pour $n = 1$: $2^1 + \frac{1}{2^1} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = u_1$, d'où $P(1)$ est vraie.

- Double hérédité : On suppose $P(n)$ et $P(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_{n+2} &= \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{5}{2} \left(2^{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) - \left(2^n + \frac{1}{2^n} \right) \\ &= 5 \times 2^n + \frac{5}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} - 2^n - \frac{1}{2^n} \\ &= 4 \times 2^n + \frac{5}{4} \times \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} \\ &= 2^2 \times 2^n + \left(\frac{5}{4} - 1 \right) \frac{1}{2^n} \\ &= 2^{n+2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} \\ &= 2^{n+2} + \frac{1}{2^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété $P(n+2)$ est vraie.

Par conséquent, par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + \frac{1}{2^n}$.

1,5 point : 0,5 pour l'initialisation, 1 pour l'hérédité, -0,5 sans conclusion

- Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Réponse :

$2 > 0$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $u_n = 2^n + \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

0,5 point

- (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Réponse :

$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

0,5 point

- Réécrire le résultat précédent avec des quantificateurs.

Réponse :

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > A$

1 point

- Pour une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque, est-ce suffisant de ne pas être majorée pour diverger vers $+\infty$?

Réponse :

Non il n'est pas suffisant de ne pas être majorée pour diverger vers $+\infty$ pour une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque.

Par exemple, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n \times (-1)^n$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée mais ne diverge pas vers $+\infty$.

1 point

4. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.

Réponse :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + \frac{1}{2^n} > 0$.

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.

0,5 point

- (b) Réécrire le résultat précédent avec des quantificateurs.

Réponse :

$\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A$.

1 point

- (c) Pour une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque, est-ce suffisant d'être minorée pour converger ?

Réponse :

Non il n'est pas suffisant d'être minorée pour converger pour une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque.

Par exemple, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée (par 0 par exemple) mais n'est pas convergente.

1 point

Exercice 2 - Résolution d'un système (6 points)

On considère $a \in \mathbb{R}$ et le système, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 3y + az = 7. \end{cases}$$

Résoudre le système dans les cas suivants.

5. Lorsque $a = 1$.

Réponse :

On suppose $a = 1$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 7 \end{array} \right. & \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ L_1 \longleftrightarrow L_2 \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + z = 7 \end{array} \right. \\
& \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ -3y - 3z = -5 \\ -3y - 2z = -5 \end{array} \right. \\
& \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ 3y + 3z = 5 \\ 3y + 2z = 5 \end{array} \right. \\
& \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ 3y + 3z = 5 \\ -z = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 3y = 5 \\ z = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x + 2 \times \frac{5}{3} = 4 \\ y = \frac{5}{3} \\ z = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{3} \\ z = 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Donc $S = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0 \right) \right\}$.

2 points

6. Lorsque $a = 0$.

Réponse :

On suppose $a = 0$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 3y = 7 \end{array} \right. & \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ L_1 \longleftrightarrow L_2 \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y = 7 \end{array} \right. \\
& \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ -3y - 3z = -5 \\ -3y - 3z = -5 \end{array} \right. \\
& \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ 3y + 3z = 5 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = 4 - 2y - z \\ y = \frac{5}{3} - z \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = 4 - \frac{10}{3} + 2z - z = \frac{2}{3} + z \\ y = \frac{5}{3} - z \end{array} \right.
\end{array}$$

Donc $S = \left\{ \left(\frac{2}{3} + z, \frac{5}{3} - z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$.

2 points

7. Dans le cas presque général où $a \neq 0$.

Réponse :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{array}{ccc}
\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 3y + az = 7 \end{array} \right. & \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ \\ \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ \\ \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \\ \\ \Longleftrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \\ \Longleftrightarrow \\ \text{car } a \neq 0 \\ \\ \Longleftrightarrow \\ \\ \Longleftrightarrow \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + az = 7 \\ \\ x + 2y + z = 4 \\ -3y - 3z = -5 \\ -3y + (a-3)z = -5 \\ \\ x + 2y + z = 4 \\ 3y + 3z = 5 \\ 3y + (3-a)z = 5 \\ \\ x + 2y + z = 4 \\ 3y + 3z = 5 \\ -az = 0 \\ \\ x + 2y = 4 \\ 3y = 5 \\ z = 0 \\ \\ x + 2 \times \frac{5}{3} = 4 \\ y = \frac{5}{3} \\ z = 0 \\ \\ x = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{3} \\ z = 0. \end{array} \right.
\end{array}$$

Donc $S = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0 \right) \right\}$.

2 points

Exercice 3 - Raisonnements sur une fonction (4,5 points)

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

8. Ecrire avec des quantificateurs : la fonction f est paire.

Réponse :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x).$$

0,5 point

9. Retranscrire la phrase : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 10$.

Réponse :

La fonction f est majorée par 10.

0,5 point

10. Retranscrire la phrase : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.

Réponse :

La fonction f est croissante.

1 point

11. Montrer que si la fonction f est impaire alors $f(0) = 0$.

Réponse : On suppose que la fonction f est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.

En particulier, pour $x = 0$, $f(0) = -f(0)$.

$$\text{Donc } 2f(0) = 0.$$

$$\text{Donc } f(0) = 0.$$

1 point

12. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x)^2 + f(y)^2 = 0$ si et seulement si $f(x) = f(y) = 0$.

Réponse :

On procède par double implication.

- On suppose que $f(x) = f(y) = 0$.
Alors $f(x)^2 + f(y)^2 = 0^2 + 0^2 = 0$.
- Pour la réciproque on procède par contraposée. On suppose que $f(x) \neq 0$ ou $f(y) \neq 0$.
 - Si $f(x) \neq 0$ alors $f(x)^2 + f(y)^2 > 0 + f(y)^2 \geq 0$, d'où $f(x)^2 + f(y)^2 \neq 0$.
 - Si $f(y) \neq 0$ alors $f(x)^2 + f(y)^2 > f(x)^2 + 0 \geq 0$, d'où $f(x)^2 + f(y)^2 \neq 0$.

Donc $f(x)^2 + f(y)^2 \neq 0$.

Ainsi, par contraposée, si $f(x)^2 + f(y)^2 = 0$ alors $f(x) = f(y) = 0$.

Par conséquent $f(x)^2 + f(y)^2 = 0$ si et seulement si $f(x) = f(y) = 0$.

1,5 point : 0,5 pour le sens réciproque, 1 pour le sens direct, -0,5 sans conclusion

Exercice 4 - Arithmétique (2 points)

Pour $x \in [0, 1]$, x est un nombre décimal s'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$.

13. Montrer, par l'absurde, que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Réponse :

On suppose, par l'absurde, que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Alors il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

Donc $10^n = 3a$.

Ainsi 10^n est un multiple de 3.

Or la somme des chiffres de 10^n est 1 non divisible par 3 ce qui est absurde.

Par conséquent $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

2 points (0,5 pour la rédaction, 0,5 pour $10^n = 3a$, 1 point pour expliquer l'absurdité)

Exercice 5 - Etude d'un ensemble de fonctions (3,5 points)

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions paires $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire vérifiant la propriété.

- (a) Déterminer $f(0)$.

Réponse :

Pour $x = y = 0$, $f(0 + 0) = f(0) + f(0) + 2 \times 0 \times 0$.

Donc $f(0) = 2f(0)$.

Donc $f(0) = 0$.

1 point

- (b) Déterminer l'expression de la fonction f .

Réponse :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors, pour $y = -x$, $f(x - x) = f(x) + f(-x) + 2x(-x)$.

Or $f(-x) = f(x)$, d'où $0 = f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2$.

Donc $f(x) = x^2$.

1,5 point

15. Conclure.

Réponse :

On procède par analyse-synthèse :

- Analyse :
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire vérifiant la propriété.
Donc, d'après la question 1, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
- Synthèse :
Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, alors, la fonction f est paire et, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
 $f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = f(x) + f(y) + 2xy$.

Par conséquent l'ensemble des fonctions paires vérifiant l'équation souhaitée est $S = \{x \mapsto x^2\}$.

1 point

Exercice 6 - Calculs de sommes (8 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{2k+2}$

Réponse :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{2k+2} &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{2k} \times 2^2 \\ &= 4 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k \\ &= 4 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k \times 1^{n-k} - 4 \\ &= 4(4+1)^n - 4 \text{ par formule du binôme de Newton} \\ &= 4 \times 5^n - 4 \end{aligned}$$

1 point

2. $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$

Réponse :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2) &= \sum_{k=1}^n 7^k + 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n n + \sum_{k=1}^n 2 \text{ par linéarité de la sommation} \\ &= \frac{7 - 7^{n+1}}{7 - 7} + 4 \frac{n(n+1)}{2} - n \times n + 2n \\ &= \frac{7^{n+1} - 7}{7^{n+1} - 7} + 2n(n+1) - n^2 + 2n \\ &= \frac{6}{7^{n+1} - 7} + n^2 + 4n \end{aligned}$$

1 point

3. $\prod_{k=1}^n \frac{k^2 + 4k + 3}{k^2 + 4k + 4}$

Réponse :

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2 + 4x + 3$ et $g : x \mapsto x^2 + 4x + 4$ définies sur $\mathbb{R}$.

Alors il s'agit de fonctions du second degré de discriminants

$$\Delta_f = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0 \text{ et } \Delta_g = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0.$$

Donc la fonction f admet deux racines

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = -3$$

et la fonction g admet une racine double

$$x_0 = -\frac{4}{2 \times 1} = -2.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x+1)(x+3) \text{ et } g(x) = (x+2)^2.$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi } \prod_{k=1}^n \frac{k^2 + 4k + 3}{k^2 + 4k + 4} &= \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n (k+2)} \times \frac{\prod_{k=1}^n (k+3)}{\prod_{k=1}^n (k+2)} \\
&= \frac{2}{n+2} \times \frac{n+3}{3} \text{ par produits télescopiques} \\
&= \frac{2(n+3)}{3(n+2)}.
\end{aligned}$$

2 points

$$4. \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)}$$

Réponse :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^j i^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \times \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{2j+1}{6} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n j + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n 1 \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{6} \\
&= \frac{n(n+2)}{6}
\end{aligned}$$

2 points

$$5. \sum_{0 \leq p \leq q \leq n} \binom{n}{p} 2^q$$

Réponse :

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq p \leq q \leq n} \binom{n}{p} 2^q &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sum_{q=p}^n 2^q \\
&= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{2^p - 2^{n+1}}{1-2} \\
&= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^{n+1} - \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p \\
&= 2^{n+1} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^p \times 1^{n-p} - \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p \times 1^{n-p} \\
&= 2^{n+1} (1+1)^n - (2+1)^n \\
&= 2^{2n+1} - 3^n
\end{aligned}$$

2 points