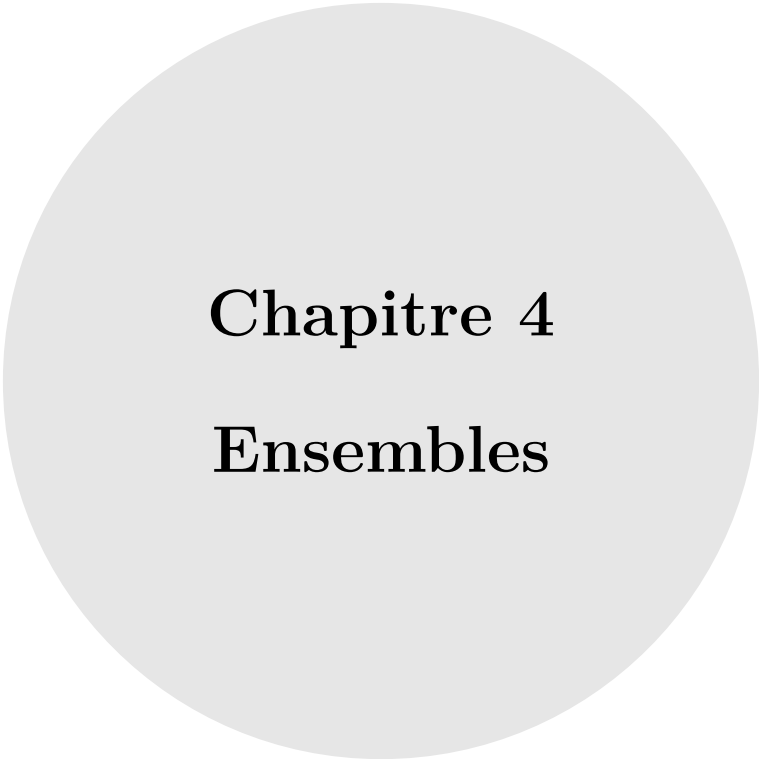




Chapitre 4

Ensembles

Mathématiques avec M. Cacitti

PCSI du lycée Paul Eluard de Saint-Denis

Année scolaire 2026-2027

1 Ensembles et sous-ensembles

Définition 1 : Ensemble

Un **ensemble** E est une « collection » d'objets.

Si x est un de ces objets alors on dit que x est un élément de l'ensemble E , ou encore que x **appartient** à l'ensemble E , ce qu'on note $x \in E$.

Remarques.

- Si un élément x n'appartient pas à un ensemble E alors on le note $x \notin E$.
- Si l'ensemble E ne contient aucun élément alors on le note $\emptyset$.
- Si l'ensemble E ne contient qu'un élément x_0 alors on dit que l'ensemble E est un singleton et on le note $E = \{x_0\}$.
- Si l'ensemble E ne contient que deux éléments x_1 et x_2 alors on dit que l'ensemble E est une paire et on le note $E = \{x_1, x_2\}$.

Exemples.

- $\pi \in \mathbb{R}$ et $\pi \notin \mathbb{Q}$.
- L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{S} = \emptyset$.
- L'ensemble des zéros de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ est le singleton $\{1\}$.
- L'ensemble des valeurs possibles de la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la paire $\{-1, 1\}$.

Remarque. Il y a trois façons de présenter un ensemble.

- Soit **en extension** avec des accolades et la liste de ses éléments.
- Soit **en compréhension par condition** où l'on l'écrit comme l'ensemble des objets qui vérifient une certaine propriété.
- Soit **en écriture paramétrique** où l'on décrit les éléments de l'ensemble comme une expression dépendant d'un paramètre.

Exemples.

- Le graphique Γ_f de la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ peut être écrit

$$\Gamma_f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ ou } \Gamma_f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = x^2\}.$$

- L'ensemble $2\mathbb{Z}$ des entiers pairs peut être écrit

$$2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ ou } 2\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}, m = 2n\} \text{ ou } 2\mathbb{Z} = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\}.$$

Exercice 1. Ecrire en symbolique les ensembles suivants.

- L'ensemble A des réels x vérifiant $x^2 + e^x = 12$.
- L'ensemble B des entiers naturels du type $3m^2 + n^3$ où $m, n \in \mathbb{N}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble C_n des fractions de numérateur entier compris entre 1 et n et de dénominateur n .

Remarque. Il existe trois types d'ensembles selon leur cardinalité.

- Les ensembles **finis** qui ont un nombre d'éléments fini. On appelle cardinal ce nombre d'éléments.
- Les ensembles **dénombrables** dont on peut numérotter les éléments par les entiers naturels.
- Les ensembles **indénombrables** qui sont infinis et non dénombrables.

Exemples.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des entiers compris entre 0 et n est un ensemble fini de cardinal $n + 1$ et est noté $\llbracket 0, n \rrbracket$ ou encore $\{0, \dots, n\}$.
- Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
- Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont indénombrables.

Définition 2 : Sous-ensemble ou partie

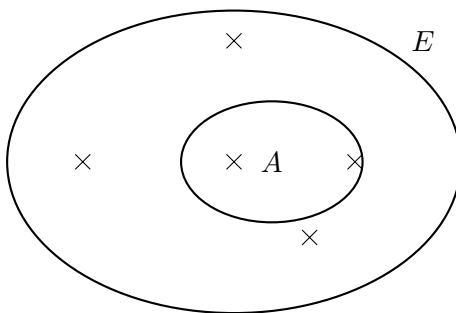
Soient E et A deux ensembles. On dit que l'ensemble A est une **partie** (ou **sous-ensemble**) de l'ensemble E si tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble E :

$$\forall x \in A, x \in E.$$

On dit alors que :

- l'ensemble A est **inclus** dans l'ensemble E ;
- l'ensemble E **contient** l'ensemble A .

On le note alors $A \subset E$ ou $A \subseteq E$.



Exemples.

- Quel que soit l'ensemble E , on a toujours $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Remarque.

- Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble E , on fixe $x \in A$ et on montre que $x \in E$.
- Pour montrer qu'un ensemble A n'est pas inclus dans un ensemble E , on montre qu'il existe $x \in A$ tel que $x \notin E$.

Exemple. Soient A l'ensemble des multiples de 6 et B l'ensemble des entiers pairs. Alors $A \subset \mathbb{Z}$ et $B \subset \mathbb{Z}$ et de plus $A \subset B$.

En effet : soit $n \in A$. Alors n est un multiple de 6. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 6k = 2 \times 3k$. Ainsi n est un entier pair, d'où $n \in B$. Par conséquent $A \subset B$.

Exercice 2. Soient A l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paires et B l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + b$. Montrer que $B \subset A$.

Définition 3 : Ensemble des parties

Soit E un ensemble. Les sous-ensembles de l'ensemble E forment un ensemble, appelé **ensemble des parties** de l'ensemble E et noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple. Soit $E = \{1, 2, 4\}$.

Alors l'ensemble E contient 3 éléments.

Donc ses parties contiennent 0, 1, 2 ou 3 éléments. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

- Si la partie A contient 0 élément alors $A = \emptyset$.
- Si la partie A contient 1 élément alors $A = \{1\}$ ou $A = \{2\}$ ou $A = \{4\}$.
- Si la partie A contient 2 éléments alors $A = \{1, 2\}$ ou $A = \{1, 4\}$ ou $A = \{2, 4\}$.
- Si la partie A contient 3 éléments alors $A = \{1, 2, 4\} = E$.

Ainsi

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, E\}.$$

En particulier $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini à $8 = 2^3$ éléments.

Exercice 3. Déterminer le nombre d'éléments dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{0, 1, 2, 3\}$.

Remarque. Attention aux notations. Pour un ensemble E , une partie A de l'ensemble E et x un élément de la partie A , on écrit $x \in A \subset E$, $\{x\} \subset A$ ou encore $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ et $A \in \mathcal{P}(E)$.

Proposition 1 : Propriétés de l'inclusion

Soit E un ensemble. L'inclusion vérifie les propriétés suivantes.

- **Réflexivité** : pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset A$.
- **Antisymétrie** : pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$.
- **Transitivité** : pour tous $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Démonstration. On raisonne grâce aux quantificateurs.

Remarque. En particulier, pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on procède par double inclusion : $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exemple. $\mathbb{R}_+^* = \{e^x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

En effet, procédons par double inclusion.

- Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Or :

$$\star e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0;$$

$$\star e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty;$$

★ La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc, par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = e^x$.

Ainsi $\mathbb{R}_+^* \subset \{e^x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

- Réciproquement soit $y \in \{e^x \mid x \in \mathbb{R}\}$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = e^x > 0$. Donc $y \in \mathbb{R}_+^*$.
Donc $\{e^x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_+^*$.

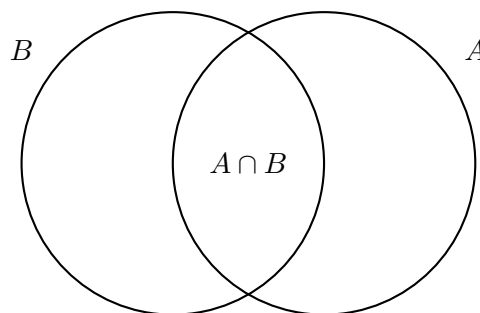
Exercice 4. Montrer que $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \leq y\}$.

2 Intersection et réunion

Définition 4 : Intersection

Soient A et B deux ensembles. L'**intersection** $A \cap B$, prononcée « A inter B », est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à l'ensemble A et l'ensemble B :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$



Remarques. Pour tous ensembles A et B .

- $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$.
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

Remarque. On peut généraliser l'intersection à plus de deux éléments. Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles. Alors, pour tout élément x ,

$$x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \in A_i.$$

Ou même à une infinité d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$ avec I un ensemble quelconque : pour tout élément x ,

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i.$$

Exemple. Soient d_1 la droite d'équation réduite $y = 3x - 6$ et d_2 la droite d'équation réduite $y = -\frac{x}{2} + 3$. Alors l'intersection des droites d_1 et d_2 est le singleton $\{(x_0, y_0)\}$.

Pour déterminer leur intersection on résout le système
$$\begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = -\frac{x}{2} + 3 \end{cases}$$

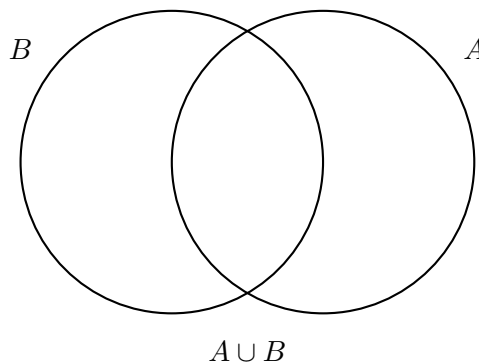
On trouve alors $d_1 \cap d_2 = \left\{ \left(\frac{18}{7}, \frac{12}{7} \right) \right\}$.

Exercice 5. Déterminer l'intersection entre les droites d_1 et d_2 d'équations cartésiennes $x + y + 1 = 0$ et $2x - 3y + 4 = 0$.

Définition 5 : Réunion

Soient A et B deux ensembles. La **réunion** (ou **union**) $A \cup B$, prononcée « A union B », est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A ou à l'ensemble B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$



Remarques. Pour tous ensembles A et B .

- $A \cup \emptyset = A$.
- Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.
- $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

Remarque. On peut généraliser la réunion à plus de deux éléments. Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles. Alors, pour tout élément x ,

$$x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \iff \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \in A_i.$$

Ou même à une infinité d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$ avec I un ensemble quelconque : pour tout élément x ,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i.$$

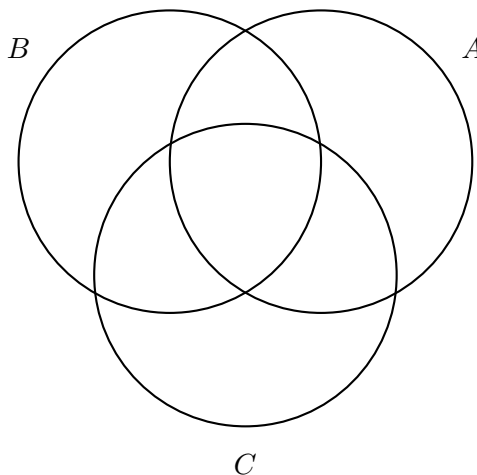
Exemple. Soient $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ et $C = \{6, 7, 8, 9\}$. Alors $A \cup B \cup C = \llbracket 1, 9 \rrbracket$.

Exercice 6. Déterminer $\bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}} \left[\frac{1}{n}, 1 \right]$ et $\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}} \left[\frac{1}{n}, 1 \right]$

Proposition 2 : Propriétés de l'intersection et de la réunion

Soient A, B et C trois ensembles. Alors l'intersection et la réunion vérifient les propriétés suivantes.

- **Idempotence** : $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$.
- **Commutativité** : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
- **Associativité** : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. On peut donc noter $A \cap B \cap C$ et $A \cup B \cup C$.
- **Distributivité** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.



Démonstration. On utilise les propriétés de la conjonction et de la disjonction logiques.

Exemple. Soient A, B, C et D quatre ensembles. Alors

$$(A \cap B) \cup (C \cup D) = ((A \cap B) \cup C) \cup ((A \cap B) \cup D) = ((A \cup C) \cap (B \cup C)) \cup ((A \cup D) \cap (B \cup D)).$$

Exercice 7. Soient A, B, C et D quatre ensembles.

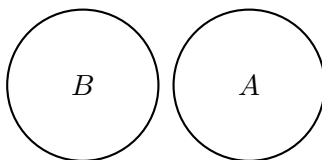
1. Développer $(A \cup B) \cap (C \cap D)$.
2. Factoriser $(A \cup B) \cap (C \cup B) \cap (D \cup B)$.

3 Ensembles disjoints, recouvrement et partition

Définition 6 : Ensembles disjoints

Soient A et B deux ensembles. Les ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Dans ce cas, leur réunion est dite disjointe et est notée $A \sqcup B$.



Exemples.

- $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-$ sont des ensembles disjoints.
- Deux droites parallèles non confondues forment deux ensembles disjoints.
- Dans l'espace, deux plans non parallèles ne forment pas deux ensembles disjoints, ils s'intersectent en une droite.

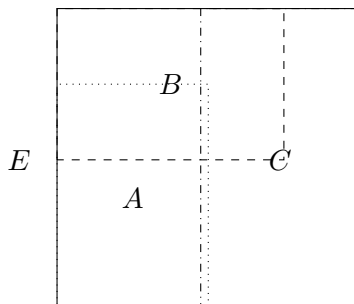
Exercice 8. Montrer que les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$ forment deux ensembles disjoints.

Définition 7 : Recouvrement

Soit E un ensemble. Un recouvrement est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de l'ensemble E telle que :

$$E = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$, il existe (au moins un) $i \in I$ tel que $x \in A_i$.



Exemple. On considère les ensembles suivants :

- A : l'ensemble des multiples entiers de 2 entre 1 et 100 ;
- B : l'ensemble des multiples entiers de 3 entre 1 et 100 ;
- C : l'ensemble des entiers entre 1 et 100 qui ne sont ni des multiples de 2 ni des multiples de 3.

Alors la famille (A, B, C) forme un recouvrement de l'ensemble des entiers entre 1 et 100.

En effet $\llbracket 1, 100 \rrbracket = A \cup B \cup C$ par double inclusion.

- Soit $n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$. Par disjonction de cas :
 - ★ si n est un multiple de 2 alors $n \in A$;
 - ★ si n est un multiple de 3 alors $n \in B$;
 - ★ sinon $n \in C$.

Ainsi $n \in A \cup B \cup C$.

- Réciproquement soit $n \in A \cup B \cup C$. Alors $n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$ car $A \subset \llbracket 1, 100 \rrbracket$, $B \subset \llbracket 1, 100 \rrbracket$ et $C \subset \llbracket 1, 100 \rrbracket$.

Exercice 9. Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ et $C = \{5, 6\}$. Montrer que la famille (A, B, C) forme un recouvrement de l'ensemble E .

Définition 8 : Recouvrement disjoint et partition

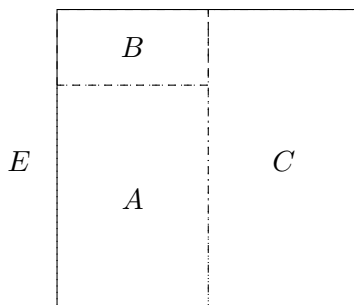
Soit E un ensemble. Un recouvrement disjoint est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de l'ensemble E telle que :

- $E = \bigcup_{i \in I} A_i$;
- les A_i sont deux à deux disjoints : $\forall i, j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.

Autrement dit, pour tout $x \in E$, il existe un unique $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Dans ce cas, on note $E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$.

Si de plus, pour tout $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$ alors on dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de l'ensemble E .



Exemples.

- Soit $E = \{1, 2, 4\}$. Les familles $(\{1\}, \{2, 4\})$ et $(\{1\}, \{2\}, \{4\})$ sont des partitions de l'ensemble E .
- La famille $(\mathbb{R}_-, \{0\}, \mathbb{R}_+)$ est une partition de l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Montrer que la famille $([n, n+1[)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de l'ensemble $\mathbb{R}_+$.

Remarque. Pour un ensemble E ,

- une partition est un recouvrement disjoint ;
- un recouvrement disjoint est un recouvrement.

Les réciproques sont fausses.

Exemple. La famille des $([-n, n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de l'ensemble $\mathbb{R}$ mais n'est pas un recouvrement disjoint.

En effet $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ par double inclusion.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ (par exemple $n = \lfloor x \rfloor + 1$) tel que $-n \leq x \leq n$, d'où $x \in [-n, n]$.
Par conséquent $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$.

- Réciproquement soit $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [-n, n] \subset \mathbb{R}$.

Par conséquent $x \in \mathbb{R}$.

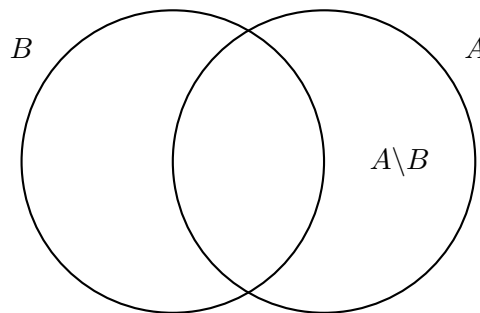
Mais les ensembles $[-n, n]$ ne sont pas disjoints. En effet $0 \in [-n, n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 Différence et complémentaire

Définition 9 : Différence

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. La différence $A \setminus B$, prononcé « A privé de B », est la partie

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$



Exemples. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

- Si les parties A et B sont disjointes alors $A \setminus B = A$ et $B \setminus A = B$.
- Si $A \subset B$ alors $A \setminus B = \emptyset$.

Exercice 11. On considère les parties :

- A : l'ensemble des entiers divisibles par 4 entre 0 et 50 ;
- B : l'ensemble des entiers divisibles par 6 entre 0 et 50 ;
- C : l'ensemble des entiers divisibles par 9 entre 0 et 50.

Déterminer les différences $A \setminus B, B \setminus A, A \setminus C, C \setminus A, B \setminus C$ et $C \setminus B$.

Proposition 3 : Expression de la différence

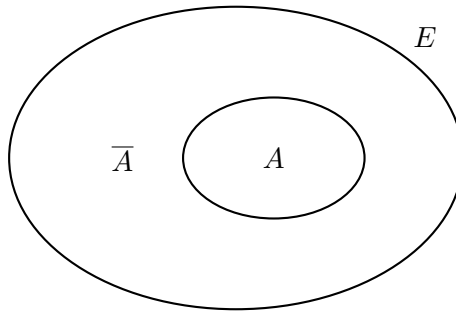
Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Alors $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Démonstration. On procède par double inclusion ou par équivalences successives.

Définition 10 : Complémentaire

Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. Le complémentaire de la partie A dans l'ensemble E , noté $\overline{A}$, A^c ou encore C_E^A , est la partie

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\} = E \setminus A.$$

**Exemples.**

- Pour E un ensemble, $\overline{\overline{E}} = \emptyset$ et $\overline{\emptyset} = E$.
- Le complémentaire des rationnels $\mathbb{Q}$ dans les réels $\mathbb{R}$ est l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels.

Exercice 12. On considère l'ensemble E des codes à trois chiffres allant de 0 à 9 et la partie A des codes contenant au moins un chiffre pair.

1. Décrire le complémentaire $\overline{A}$.
2. Donner un exemple de code appartenant à la partie A et un au complémentaire $\overline{A}$.
3. Déterminer si les codes suivants appartiennent à la partie A ou au complémentaire $\overline{A}$: 135, 408, 777, 902.

Proposition 4 : Propriétés du complémentaire

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Alors :

- $\overline{\overline{A}} = A$;
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = E$, autrement dit, la famille $(A, \overline{A})$ est un recouvrement disjoint de l'ensemble E ;
- **lois de De Morgan** : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
- $A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}$.

Démonstration. On utilise les propriétés des opérateurs logiques non($\cdot$), $\wedge$ et $\vee$ ainsi que les lois de De Morgan sur les opérateurs logiques.

Exercice 13. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de l'ensemble E . Simplifier les parties suivantes.

1. $\overline{A \cup B} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
2. $\overline{(A \cap \overline{B}) \cup \overline{B} \cup C}$
3. $\overline{\overline{\overline{A \cap B} \cup C}}$

5 Produit cartésien

Définition 11 : Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** des ensembles E et F est l'ensemble $E \times F$ défini par :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Un élément $z \in E \times F$ s'écrit $z = (x, y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$ et est appelé un **couple**.

Exemples.

- Le plan $\mathbb{R}^2$ est le produit cartésien entre les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$.
- L'espace $\mathbb{R}^3$ est le produit cartésien entre les ensembles $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$.
- Le produit cartésien $\mathbb{Z}^2$ entre les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ représente tous les points du plan à coordonnées entières, autrement dit, un quadrillage infini de points.
- Le produit cartésien $[0, 1]^2$ représente l'intérieur (frontière incluse) du carré de sommets $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ et $(1, 1)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.
- Le produit cartésien $]0, 1[^3$ représente de même l'intérieur (frontière exclue) du cube dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14. Que représentent les produits cartésiens suivants ?

1. $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$
2. $(\mathbb{R}_+)^2$
3. $[2, 3] \times [4, 6]$
4. $[0, 1] \times [2, 3] \times [4, 5]$

Remarque. Plus généralement, pour $E_1, \dots, E_n$ des ensembles, on peut définir de même le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_n$.

Dans ce cas, un élément du produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_n$ est appelé un **n -uplet**.

Exemple. $\mathbb{R}^n$ représente un espace de dimension n comme $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 et $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

Remarques. Pour E et F deux ensembles :

- les produits cartésiens $E \times F$ et $F \times E$ ne sont pas égaux ;
- pour $x \in E$ et $y \in F$, $(x, y) \neq (y, x)$ mais $\{x, y\} = \{y, x\}$, autrement dit, l'ordre compte pour un couple mais pas pour une paire.

Exemple. Dans le plan, les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ ne sont pas les mêmes.

Exercice 15. Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Enumérer tous les éléments du produit cartésien $E \times F$.
2. Faire de même avec le produit cartésien $F \times E$.
3. Quel est le cardinal de ces produits cartésiens ? Quel lien y a-t-il avec les cardinaux des ensembles E et F ?

6 Exercices

6.1 Ensembles et sous-ensembles

Exercice 16. Dans chacun des cas suivants, donner des exemples d'éléments de l'ensemble E .

1. $E = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$
2. $E = \{(t + 2, t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$
3. $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$

Exercice 17. Dans chacun des cas suivants, donner la liste explicite des éléments de l'ensemble E .

1. E l'ensemble des entiers compris entre $\sqrt{2}$ et 2π .
2. $E = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, x = \frac{a}{b} \text{ et } 1 \leq a \leq 2b \leq 7\right\}$
3. $E = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \leq m^2 + n^2 \leq 10\}$

Exercice 18. Soient a, b, c et d des réels deux à deux distincts. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le premier objet est un élément du deuxième objet, un sous-ensemble ou ni l'un ni l'autre.

1. a et $\{a, c, d\}$.
2. a et $\{b, c\}$.
3. $\{a\}$ et $\{a, c\}$.
4. $\{c\}$ et $\{a, b\}$.
5. $\emptyset$ et $\{a, b, c, d\}$.
6. $\{a, b\}$ et $\{a, c, d\}$.

Exercice 19. Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles A et B sont égaux.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}, x = 1 + y^2\}$ et $B = [1, +\infty[$.
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 2, t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $A = \{(i, j) \mid (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, i + j = n\}$ et $B = \{(k, n - k) \mid 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}\}$.
4. $A = \left\{ \begin{array}{ccc} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^t + \mu e^{-t} \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et $B = \left\{ \begin{array}{ccc} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha \operatorname{ch}(t) + \beta \operatorname{sh}(t) \end{array} \middle| (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Exercice 20. Déterminer toutes les inclusions entre les ensembles suivants.

- $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\}$
- $B = \left\{ \frac{a}{b} \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}^*, b = 2k \right\}$
- $C = \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 = -4\}$
- $D = \mathbb{Q}$

Exercice 21. Soit E un ensemble à trois éléments. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient huit éléments.

6.2 Intersection et réunion

Exercice 22. On considère la suite d'ensembles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $E_0 = \emptyset$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_{n+1} = E_n \cup \{E_n\}$.

1. Ecrire explicitement les ensembles E_1, E_2 et E_3 .
2. A-t-on $E_1 = \mathcal{P}(E_0)$?
3. A-t-on $E_2 = \mathcal{P}(E_1)$?

Exercice 23. Soient A, B et C des ensembles tels que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 24. Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C.$$

Exercice 25. Soient A, B, C et D des sous-ensembles d'un ensemble E tels que :

- $E = A \cup B \cup C$;
- $A \cap D \subset B$;
- $B \cap D \subset C$;
- $C \cap D \subset A$.

Montrer que $D \subset A \cap B \cap C$.

Exercice 26. Déterminer les ensembles suivants.

1. $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[2 + \frac{1}{n}, 5 - \frac{1}{n} \right]$
2. $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3 - \frac{1}{n}, 4 + \frac{1}{n} \right]$
3. $\bigcap_{n=1}^{+\infty}] -\infty, -n]$

6.3 Ensembles disjoints, recouvrement et partition

Exercice 27. Soient $E = \llbracket 1, 6 \rrbracket$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ et $C = \{3, 6\}$.

1. Déterminer $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$.
2. En déduire quels ensembles sont disjoints ?
3. Que peut-on dire des sous-ensembles A , B et C par rapport à l'ensemble E ?

Exercice 28. Soient $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

1. Quels ensembles sont disjoints deux à deux ?
2. Montrer qu'ils forment un recouvrement de l'intervalle $[-1, 1]$.
3. Les modifier pour qu'ils forment une partition de $[-1, 1]$.

Exercice 29. Donner des exemples de partitions, faisant intervenir $n \in \mathbb{N}$, des ensembles suivants.

1. $\mathbb{N}$
2. $\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{R}$
5. $[0, 1]$

Exercice 30. On considère, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $A_k = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2k \leq x < 2k + 2\}$.

1. Donner A_0 , A_1 et A_{-1} .
2. Montrer que la famille $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une partition de l'ensemble $\mathbb{Z}$.
3. Interpréter cette partition.

6.4 Différence et complémentaire

Exercice 31. On considère l'ensemble $E = \llbracket 1, 8 \rrbracket$ et les sous-ensembles $A = \llbracket 1, 5 \rrbracket$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ et $C = \{1, 4, 7\}$. Déterminer les sous-ensembles suivants.

1. $A \setminus B$
2. $B \setminus A$
3. $A \setminus C$
4. $\overline{A}$
5. $\overline{B}$
6. $\overline{C}$

Exercice 32. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que

$$A \subset B \iff A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Exercice 33. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer que

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C).$$

Exercice 34. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . On définit la **différence symétrique** comme le sous-ensemble

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Représenter $A \Delta B$ schématiquement.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$. Le représenter schématiquement.
3. Montrer que si $A \Delta B = A \cap B$ alors $A = B = \emptyset$.
4. Montrer que $A \Delta B = A \Delta C \iff B = C$.
5. Résoudre l'équation $A \Delta X = \emptyset$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 35. Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensembles A et B de l'ensemble E , on définit $A \nabla B = \overline{A \cup B}$.

1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Exprimer le complémentaire $\overline{A}$ à l'aide de la partie A et de l'opérateur ∇ .
2. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Calculer et simplifier $(A \nabla A) \nabla (B \nabla B)$.
3. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Exprimer $A \cup B$ et $A \setminus B$ à l'aide de A, B et de la loi ∇ uniquement.

6.5 Produit cartésien

Exercice 36. Soient $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ et $C = \{b\}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Ecrire explicitement le produit $A \times B$.
2. Faire de même avec $A \times C$.
3. Soit $R = (A \times B) \setminus (A \times C)$. En déduire la partie R .
4. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.
 - (a) $(2, a) \in R$
 - (b) $(3, b) \in R$
 - (c) $(1, b) \in A \times B$
 - (d) $(2, b) \in A \times C$
5. Soit $S = \{(x, y) \in A \times B \mid y \neq b\}$.
 - (a) Décrire S sans produit cartésien.
 - (b) Comparer les ensembles S et $A \times \{a\}$.

Exercice 37. Soient E et F deux ensembles et $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

1. Justifier que $A \times B$ est un sous-ensemble du produit $E \times F$.
2. Montrer que les ensembles $\overline{A} \times B$, $A \times \overline{B}$ et $\overline{A} \times \overline{B}$ sont deux à deux disjoints.
3. Montrer que $\overline{A \times B} = (\overline{A} \times B) \sqcup (A \times \overline{B}) \sqcup (\overline{A} \times \overline{B})$.

Exercice 38. On considère $A = [1, 4]$, $B = [3, 6]$, $C = [2, 5]$ et $D = \{2\}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les ensembles $A \cup C$, $A \cap B$ et $A \setminus D$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, tracer $(A \cap B) \times A$, $\overline{B} \times (A \cup C)$ et $(A \setminus D) \times D$.

Exercice 39. Soient E et F deux ensembles, $A, C \in \mathcal{P}(E)$ et $B, D \in \mathcal{P}(F)$. Quelles égalités suivantes sont vraies ?

1. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
2. $(A \cup C) \times A = (A \times A) \cup (C \times A)$
3. $(A \times B) \cup (A \times D) = A \times (B \cup D)$

Exercice 40. Soient E et F deux ensembles et R une partie du produit cartésien $E \times F$, $A = \{x \in E \mid \exists y \in F, (x, y) \in R\}$ et $B = \{y \in F \mid \exists x \in E, (x, y) \in R\}$.

1. Interpréter les parties A et B .
2. Montrer l'inclusion $R \subset A \times B$.
3. A-t-on l'égalité ?

Table des matières

1	Ensembles et sous-ensembles	2
2	Intersection et réunion	4
3	Ensembles disjoints, recouvrement et partition	6
4	Différence et complémentaire	8
5	Produit cartésien	10
6	Exercices	11

Programme officiel de ce chapitre

Contenus	Capacités et commentaires
Ensemble, appartenance. Ensemble vide. Inclusion. Partie (ou sous-ensemble). Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Ensembles des parties d'un ensemble. Recouvrement disjoint, partition.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire. Notation $\mathcal{P}(E)$.