

Coefficients binomiaux

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 19.1 — Pour s'échauffer (I).



Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\frac{101!}{99!}$		c) $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$		e) $\binom{8}{3}$	
b) $\frac{10!}{7!}$		d) $\binom{6}{2}$		f) $4 \times \binom{7}{4}$	

Calcul 19.2 — Pour s'échauffer (II).



Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$		c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$	
b) $\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$		d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$...	

Calcul 19.3 — Avec des paramètres (I).



Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\binom{n}{2}$ (pour $n \geq 2$)		d) $\frac{(n+2)!}{n!}$	
b) $\binom{n}{3}$ (pour $n \geq 3$)		e) $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$	
c) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$		f) $\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}}$	

Calcul 19.4 — Avec des paramètres (II).



Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!}$	
b) $\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$	

Autour du binôme de Newton

Calcul 19.5



Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \dots\dots\dots$

c) $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k} \dots\dots\dots$

b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \dots\dots\dots$

d) $\sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1} \dots\dots\dots$

Calcul 19.6



a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1 + 1)^n + (1 - 1)^n \dots\dots\dots$

b) Calculer $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} \dots\dots\dots$

Calcul 19.7



En utilisant la fonction $x \mapsto (1 + x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer :

a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \dots\dots\dots$

c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2 \dots\dots\dots$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k \dots\dots\dots$

d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} \dots\dots\dots$

Calcul 19.8



a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1 + x)^{2n} \dots\dots\dots$

b) En donner une autre expression en développant le produit $(1 + x)^n (1 + x)^n \dots\dots\dots$

c) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \dots\dots\dots$