

Sommes et produits

Rappel

Si q est un nombre réel, si $m, n \in \mathbb{N}^*$ et si $m \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=m}^n k &= \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} & \bullet \sum_{k=1}^n k^3 &= \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \bullet \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \bullet \sum_{k=m}^n q^k &= \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 18.1



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{n+2} n$

c) $\sum_{k=1}^n (3k + n - 1)$

b) $\sum_{k=2}^{n+2} 7k$

d) $\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3} \right)$

Calcul 18.2



Même exercice.

a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$

d) $\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$

b) $\sum_{k=0}^n (4k(k^2 + 2))$

e) $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$

c) $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$

f) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$

Calcul 18.3 — Produits (I).



Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \geq q$.

a) $\prod_{k=p}^q 2$

b) $\prod_{k=1}^n 3^k$

Calcul 18.4 — Produits (II).



Même exercice.

a) $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k \dots\dots\dots$

b) $\prod_{k=-10}^{10} k \dots\dots\dots$

Avec des changements d'indice

Calcul 18.5



Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\sum_{k=1}^n n+1-k$ avec $j = n+1-k$ $\dots\dots\dots$

b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$ $\dots\dots\dots$

c) $\sum_{k=1}^n k2^k$ avec $j = k-1$ $\dots\dots\dots$

d) $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$ $\dots\dots\dots$

Sommes et produits télescopiques

Calcul 18.6 — Sommes télescopiques.



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3 \dots\dots$

c) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \dots\dots\dots$

b) $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \dots\dots\dots$

d) $\sum_{k=1}^n k \times k! \dots\dots\dots$

Calcul 18.7 — Produits télescopiques.



Calculer les produits suivants.

a) $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \dots\dots\dots$

c) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \dots\dots\dots$

b) $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-3} \dots\dots\dots$

d) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \dots\dots\dots$

Autres sommes

Calcul 18.8 — À l'aide d'une décomposition en éléments simples.



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

b) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$...

Calcul 18.9 — Sommations par paquets.



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$

b) $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$

Sommes doubles

Calcul 18.10



Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$

d) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)^2$

b) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$

e) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j)$

c) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$

f) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$