

Total des points : 27,5

## Exercice 1 - Calcul d'une somme (5 points)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le but de cet exercice est de calculer, en fonction de  $n$ , la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}.$$

1. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)^2$ .

**Réponse :**

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)^2 &= \left(\frac{k(k+1) + 1}{k(k+1)}\right)^2 \\ &= \frac{(k^2 + k + 1)^2}{k^2(k+1)^2} \\ &= \frac{k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} \\ \text{et } 1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} &= \frac{k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2}{k^2(k+1)^2} \\ &= \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + k^2 + 2k + 1 + k^2}{k^2(k+1)^2} \\ &= \frac{k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)^2.$$

1 point

2. En déduire que  $S_n = n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .

**Réponse :**

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)^2} \text{ d'après la question 1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right) \text{ car } 1 + \frac{1}{k(k+1)} \geq 0 \\ &= \sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \text{ par linéarité} \\ &= n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

1 point

3. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .

**Réponse :**

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Alors } \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

1 point

4. En déduire l'expression de la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  en fonction de  $n$ .

**Réponse :**

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \text{ d'après la question 3} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \text{ par linéarité} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \text{ par somme télescopique}\end{aligned}$$

1 point

5. Conclure en donnant l'expression de la somme  $S_n$  en fonction de  $n$ .

**Réponse :**

$$\begin{aligned}S_n &= n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \text{ d'après la question 2} \\ &= n + 1 - \frac{1}{n+1} \text{ d'après la question 4}\end{aligned}$$

1 point

## Exercice 2 - Démonstration d'une inégalité (5,5 points)

Le but de cet exercice est de montrer, par récurrence, que, pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\left( \frac{n+1}{2} \right)^n > n!$$

.

1. Réaliser l'initialisation.

**Réponse :**

$$\text{Pour } n = 2, \text{ nous avons } \left( \frac{n+1}{2} \right)^n = \left( \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{4} \text{ et } 2! = 2 < \frac{9}{4}.$$

Donc la propriété est vraie pour  $n = 2$ .

1 point

2. Développer  $(n+1)^n$  grâce à une formule adaptée dont on précisera le nom.

**Réponse :**

$$\text{D'après la formule du binôme de Newton, } (n+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k.$$

1 point

3. En déduire que  $(1+n)^n > 2n^n$ .

**Réponse :**

$$\begin{aligned}(1+n)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k \text{ d'après la question 2} \\ &= n^n + \binom{n}{n-1} n^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} n^k \\ &> n^n + n \times n^{n-1} \\ &= 2n^n\end{aligned}$$

1 point

4. Que devient cette expression lorsqu'on l'applique avec  $n+1$  à la place de  $n$ ?

**Réponse :**

$$(2+n)^{n+1} > 2(n+1)^{n+1}$$

0,5 point

5. Réaliser l'hérédité et conclure.

**Réponse :**

On suppose que, pour un entier  $n \geq 2$ ,  $\left( \frac{n+1}{2} \right)^n > n!$ .

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} &= \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&> \frac{2(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \text{ d'après la question 4} \\
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1) \\
&> n!(n+1) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= (n+1)!
\end{aligned}$$

Par conséquent, par récurrence, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$ .

1,5 point

6. Quel est le plus grand nombre entre  $2021!$  et  $1011^{2021}$  ?

**Réponse :**

Pour  $n = 2021$ , nous avons  $2021! < \left(\frac{2021+1}{2}\right)^{2021} = 1011^{2021}$ .

Donc le plus grand nombre est  $1011^{2021}$ .

0,5 point

### Exercice 3 - Etude d'une implication (5 points)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . On considère l'implication  $P$  suivante :

$$[a \neq -1 \wedge b \neq -1] \implies a + b + ab \neq -1.$$

1. Ecrire la contraposée de l'implication  $P$ .

**Réponse :**

La contraposée de l'implication  $P$  est :

$$a + b + ab = -1 \implies [a = -1 \vee b = -1].$$

1 point

2. Montrer que la contraposée de l'implication  $P$  est vraie.

**Réponse :**

On suppose que  $a + b + ab = -1$ .

$$\text{Donc } 0 = a + b + ab + 1 = (a + 1)(b + 1).$$

Donc, par propriété des réels,  $a + 1 = 0$  ou  $b + 1 = 0$ .

Donc  $a = -1$  ou  $b = -1$ .

Par conséquent la contraposée de l'implication  $P$  est vraie.

1 point

3. Que peut-on en déduire pour l'implication  $P$  ?

**Réponse :**

On peut en déduire que l'implication  $P$  est également vraie.

0,5 point

4. Ecrire la réciproque de l'implication  $P$ .

**Réponse :**

La réciproque de l'implication  $P$  est :

$$a + b + ab \neq -1 \implies [a \neq -1 \wedge b \neq -1].$$

1 point

5. Est-elle vraie ?

**Réponse :**

On procède par contraposée en montrant :

$$[a = -1 \vee b = -1] \implies a + b + ab = -1$$

On suppose que  $a = -1$  ou  $b = -1$ .

Procédons par disjonction des cas.

- Si  $a = -1$  alors  $a + b + ab = -1 + b - b = -1$ .
- Si  $b = -1$  alors  $a + b + ab = a - 1 - a = -1$ .

Donc  $a + b + ab = -1$ .

Par conséquent

$$[a = -1 \vee b = -1] \implies a + b + ab = -1$$

et, par contraposée, la réciproque de l'implication  $P$  est vraie.

1,5 point

## Exercice 4 - Intersection de plans (4 points)

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Le but de cet exercice est d'étudier la position relative des trois plans suivants dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  selon la valeur du paramètre  $a$ .

- $P_1$  d'équation cartésienne  $2x + 3y + 4z = 5$ .
  - $P_2$  d'équation cartésienne  $6x + 7y + 8z = 9$ .
  - $P_3$  d'équation cartésienne  $ax - y + z = 0$ .
1. Montrer, à l'aide de la méthode du pivot, que si  $a = 1$  alors les plans  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  sont sécants en unique point dont on donnera les coordonnées.

**Réponse :**

On suppose que  $a = 1$ .

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 7y + 8z = 9 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \iff \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ -2y - 4z = -6 \\ -\frac{5}{2}y - z = -\frac{5}{2} \end{array} \right. \\
 & \begin{array}{l} \iff \\ L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{2} \\ L_3 \leftarrow -2L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ y + 2z = 3 \\ 5y + 2z = 5 \end{array} \right. \\
 & \begin{array}{l} \iff \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ y + 2z = 3 \\ -8z = -10 \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ y + 2z = 3 \\ z = \frac{5}{4} \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x = 5 - 3y - 4z = 5 - \frac{3}{2} - 5 = -\frac{3}{2} \\ y = 3 - 2z = 3 - 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{4} \end{array} \right. \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{4} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Donc les plans  $P_1, P_2$  et  $P_3$  s'intersectent en un unique point de coordonnées  $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ .

2 points : 0,5 point pour l'élimination des  $x$ , 0,5 point pour l'élimination des  $y$ , 0,5 point pour l'obtention des valeurs, 0,5 point pour la conclusion

2. Dans le cas général où  $a$  est quelconque, déterminer pour quelle(s) valeur(s) du réel  $a$  les trois plans ne se coupent pas simultanément.

**Réponse :**

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\
 L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a}{2}L_1
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{2} \\
 L_3 \leftarrow -2L_3
 \end{array} \\
 L_3 \leftarrow L_3 - (2+3a)L_2 \\
 \begin{array}{l}
 L_3 \leftarrow -\frac{L_3}{2}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 7y + 8z = 9 \\ ax - y + z = 0 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ -2y - 4z = -6 \\ \left(-1 - \frac{3a}{2}\right)y + (1-2a)z = -\frac{5a}{2} \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ y + 2z = 3 \\ (2+3a)y + (4a-2)z = 5a \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ y + 2z = 3 \\ (4a-2-4-6a)z = 5a-6-9a \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ y + 2z = 3 \\ (-2a-6)z = -6-4a \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ y + 2z = 3 \\ (a+3)z = 2a+3 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Donc, pour  $a = -3$ , la dernière équation devient  $0 = -3$  ce qui est absurde.

Donc, dans ce cas, le système n'admet pas de solution, donc les trois plans ne se coupent simultanément.

Réciproquement, si  $a \neq -3$  alors le système admet une unique solution donc les trois plans se coupent simultanément en un certain point.

Par conséquent les trois plans ne se coupent pas simultanément si et seulement si  $a = -3$ .

2 points : 0,5 point pour l'élimination des  $x$ , 0,5 point pour l'élimination des  $y$ , 0,5 point pour  $a = -3$ , 0,5 point pour  $a \neq -3$

## Exercice 5 - Etude d'une suite (4 points)

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = -5$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+2} = -5u_{n+1} - 6u_n.$$

- Montrer, par récurrence double, que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (-2)^n + (-3)^n$ .

**Réponse :**

- Initialisation double :  $(-2)^0 + (-3)^0 = 1 + 1 = 2 = u_0$  et  $(-2)^1 + (-3)^1 = -2 - 3 = -5 = u_1$ .
- Hérédité double : On suppose que, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (-2)^n + (-3)^n$  et  $u_{n+1} = (-2)^{n+1} + (-3)^{n+1}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } u_{n+2} &= -5u_{n+1} - 6u_n \\
 &= -5[(-2)^{n+1} + (-3)^{n+1}] - 6[(-2)^n + (-3)^n] \\
 &= -5(-2)^{n+1} - 6(-2)^n - 5(-3)^{n+1} - 6(-3)^n \\
 &= 10(-2)^n - 6(-2)^n + 15(-3)^n - 6(-3)^n \\
 &= 4(-2)^n + 9(-3)^n \\
 &= (-2)^2(-2)^n + (-3)^2(-3)^n \\
 &= (-2)^{n+2} + (-3)^{n+2}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, par récurrence double, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (-2)^n + (-3)^n$ .

2 points : 0,5 point pour l'initialisation, 1 point pour l'hérédité, 0,5 point pour la conclusion

- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (-3)^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ .

**Réponse :**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = (-2)^n + (-3)^n = (-3)^n \left(\frac{(-2)^n}{(-3)^n} + 1\right) = (-3)^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

1 point

3. En déduire que, par l'absurde, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas convergente.

**Réponse :**

On suppose, par l'absurde, que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers un réel  $\ell$ .

Alors, d'après la question 2 et car  $-1 < \frac{2}{3} < 1$ ,  $(-3)^n = \frac{u_n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{1} = \ell$  ce qui est absurde

car la suite  $((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas convergente.

*1 point*

## Exercice 6 - Etude d'un ensemble de suites (4 points)

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la propriété suivante :

$$[\forall k \in \mathbb{N}, u_k \geq k] \wedge [\forall m \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, m = u_k].$$

1. On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifie la propriété.

- (a) Montrer que  $u_0 = 0$ .

**Réponse :**

En particulier, en utilisant la seconde propriété pour  $m = 0$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $0 = u_k$ .

Donc, grâce à la première propriété,  $0 = u_k \geq k \geq 0$ .

Donc  $k = 0$  puis  $0 = u_0$ .

*1 point*

- (b) Montrer, par récurrence forte, que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n$ .

**Réponse :**

- Initialisation : D'après la question 1.(a),  $u_0 = 0$ .
- Hérédité forte : On suppose que, pour  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $u_k = k$ .

Montrons que  $u_{n+1} = n + 1$ .

D'après la seconde propriété appliquée à  $m = n + 1$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $n + 1 = u_k$ .

Donc, d'après la première propriété,  $n + 1 = u_k \geq k$ .

On suppose, par l'absurde, que  $n + 1 > k$ , autrement dit,  $n \geq k$ . Donc, par hypothèse de récurrence forte,  $n + 1 = u_k = k$  ce qui est absurde car  $n + 1 > k$ .

Par conséquent  $k = n + 1$  puis  $n + 1 = u_k = u_{n+1}$ .

En conclusion, par récurrence forte, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n$ .

*2 points : 0,5 point pour l'initialisation et la conclusion, 1,5 point pour l'hérédité*

2. Répondre au problème de cet exercice.

**Réponse :**

On procède par analyse-synthèse.

- Analyse : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la double propriété.  
Alors, d'après la question 1, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n$ .
- Synthèse : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n$ .  
Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq n$ .  
Et, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m = u_m$ .

Par conséquent la seule suite vérifiant la double propriété est la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n$ .

*1 point*