

Devoir surveillé 1 - Mathématiques - PCSI - Samedi 19 septembre

- La durée du devoir est de 4 heures.
 - Les calculatrices ne sont pas autorisées.
 - Les exercices sont indépendants. Il n'est pas obligatoire de les traiter dans l'ordre mais il faut bien numéroter vos exercices et vos réponses.
 - Le candidat attachera la plus grande importance aux justifications, à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
 - Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
-

Exercice 1 - Calcul d'une somme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de calculer, en fonction de n , la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}.$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)^2$.
2. En déduire que $S_n = n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
4. En déduire l'expression de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ en fonction de n .
5. Conclure en donnant l'expression de la somme S_n en fonction de n .

Exercice 2 - Démonstration d'une inégalité

Le but de cet exercice est de montrer, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$$

.

1. Réaliser l'initialisation.
2. Développer $(n+1)^n$ grâce à une formule adaptée dont on précisera le nom.
3. En déduire que $(1+n)^n > 2n^n$.
4. Que devient cette expression lorsqu'on l'applique avec $n+1$ à la place de n ?
5. Réaliser l'hérédité et conclure.
6. Quel est le plus grand nombre entre $2021!$ et 1011^{2021} ?

Exercice 3 - Etude d'une implication

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'implication P suivante :

$$[a \neq -1 \wedge b \neq -1] \implies a + b + ab \neq -1.$$

1. Ecrire la contraposée de l'implication P .
2. Montrer que la contraposée de l'implication P est vraie.
3. Que peut-on en déduire pour l'implication P ?
4. Ecrire la réciproque de l'implication P .
5. Est-elle vraie ?

Exercice 4 - Intersection de plans

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est d'étudier la position relative des trois plans suivants dans l'espace $\mathbb{R}^3$ selon la valeur du paramètre a .

- P_1 d'équation cartésienne $2x + 3y + 4z = 5$.
 - P_2 d'équation cartésienne $6x + 7y + 8z = 9$.
 - P_3 d'équation cartésienne $ax - y + z = 0$.
1. Montrer, à l'aide de la méthode du pivot, que si $a = 1$ alors les plans P_1 , P_2 et P_3 sont sécants en unique point dont on donnera les coordonnées.
 2. Dans le cas général où a est quelconque, déterminer pour quelle(s) valeur(s) du réel a les trois plans ne se coupent pas simultanément.

Exercice 5 - Etude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = -5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. Montrer, par récurrence double, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n + (-3)^n$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-3)^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$.
3. En déduire que, par l'absurde, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Exercice 6 - Etude d'un ensemble de suites

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la propriété suivante :

$$[\forall k \in \mathbb{N}, u_k \geq k] \wedge [\forall m \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, m = u_k].$$

1. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie la propriété.
 - (a) Montrer que $u_0 = 0$.
 - (b) Montrer, par récurrence forte, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.
2. Répondre au problème de cet exercice.