

Exercice 1 - Factorielle, coefficients binomiaux et binôme de Newton (4 points)

1. Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q \leq n$. Montrer que $\binom{n}{p} \binom{n-p}{n-q} = \binom{n}{q} \binom{q}{p}$.
2. En déduire que, pour tous $n, q \in \mathbb{N}$ tels que $q \leq n$, nous avons $\sum_{p=0}^q \binom{n}{p} \binom{n-p}{n-q} = 2^q \binom{n}{q}$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\sum_{q=0}^n \sum_{p=0}^q \binom{n}{p} \binom{n-p}{n-q} = 3^n$.
4. En déduire, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la simplification de $\sum_{n=0}^m \sum_{q=0}^n \sum_{p=0}^q \binom{n}{p} \binom{n-p}{n-q}$.

Exercice 2 - Sommes doubles (8 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes. Ecrire les résultats sous forme factorisée.

1. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$
2. $\sum_{0 \leq i < j \leq n} ij$
3. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$
4. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$
6. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (i+j)$
7. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$
8. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j|$

Exercice 3 - Ensembles (4 points)

Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $A \cup B = A \cap B \iff A = B$.
2. Montrer que $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.
3. Résoudre l'équation $X \cap B = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.
4. Montrer que $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = B \setminus (A \cup C)$.

Exercice 4 - Arithmétique (9 points)

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir les divisibilités suivantes :
 - $6 \mid 5n^3 + n$
 - $5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$
 - $9 \mid 4^n - 1 + 6n$
- Déterminer le PGCD et les coefficients de l'égalité de Bézout des entiers a et b suivants.
 - $a = 33$ et $b = 24$.
 - $a = 37$ et $b = 27$.
 - $a = 270$ et $b = 105$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.
- Résoudre les équations suivantes d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
 - $15x + 21y = 6$
 - $37x + 27y = 1$

Exercice 5 - Sommes simples (8 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes. Ecrire les résultats sous forme factorisée si pertinent.

- $\sum_{k=0}^n k(k+1)$
- $\sum_{k=0}^n (2k+1)$
- $\sum_{k=0}^n (2^k + 4k + n - 3)$
- $\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{2^{2k-1}}$
- $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$
- $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$
- $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$
- $\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}$

Exercice 6 - Systèmes (4 points)

- Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et donner l'interprétation géométrique.

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & 3z & = & 8 \\ x & + & 2y & - & z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 7 \end{cases}$$

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et donner l'interprétation géométrique.

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ 4x & + & ay & + & 3z & = & 7 \\ 2x & + & y & + & az & = & 5 \end{cases}$$

Exercice 7 - Récurrences (4 points)

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \begin{cases} 2u_n + 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Exercice 8 - Quantificateurs (6 points)

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
 - (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$
 - (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$
 - (c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$
 - (d) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$
2. Simplifier les ensembles suivants en détaillant proprement l'égalité souhaitée.
 - (a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, x < \varepsilon\}$
 - (b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| < \varepsilon\}$

Exercice 9 - Raisonnements (5 points)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En raisonnant selon les restes possibles dans la division euclidienne de n par 3, déterminer le reste de la division euclidienne de $n^2 + n$ par 3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, par contraposée, que si n^2 est divisible par 3 alors n est divisible par 3.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}, x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer :
$$[\forall n \in \mathbb{N}, a2^n + b3^n = 0] \iff a = b = 0.$$
5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'il existe deux fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :
 - $f = g + h$;
 - $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = a$;
 - $h(0) = 0$.

Montrer de plus que le couple (g, h) est unique.

Indication : Pour montrer une unicité, deux méthodes sont possibles :

- l'analyse de l'analyse-synthèse nous donne directement l'unicité ;
- on fixe un couple quelconque de fonctions (g', h') qui vérifient les propriétés et on montre que $(g, h) = (g', h')$.

Exercice 11 - Exponentielle et logarithme (4 points)

Rappeler les différentes formules calculatoires sur les fonctions exponentielle et logarithme népérien.

Exercice 12 - Puissances (2 points)

Rappeler les différentes formules calculatoires sur les puissances.

Exercice 13 - Fractions (2 points)

Rappeler les différentes formules calculatoires sur les fractions.