

Programme de khôlle 4 et d'interrogation du 5 au 9 octobre

Une **khôlle** de mathématiques en PCSI se déroule de la façon suivante.

- L'écriture de l'**énoncé** d'une définition ou d'un résultat du cours.
- La réalisation de la **démonstration** d'un résultat ou d'un **exercice du cours**.
- Un ou deux **exercices** choisis par le khôlleur.

Une **interrogation** en PCSI se déroule de la façon suivante.

- L'écriture de l'**énoncé** d'un ou deux définitions/résultats du cours.
 - La réalisation de la **démonstration** d'un résultat ou d'un **exercice du cours**.
 - La durée de l'interrogation est de 25 minutes.
-

Définitions et résultats du cours exigibles :

- Ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$.
 - Propriétés de l'inclusion (réflexivité, antisymétrie et transitivité).
 - Intersection et réunion.
 - Propriétés de l'intersection et de la réunion (idempotence, commutativité, associativité et distributivité).
 - Recouvrement, recouvrement disjoint et partition.
 - Différence et complémentaire.
 - Propriétés du complémentaire ($\overline{\overline{A}}$, $A \cap \overline{A}$, $A \cup \overline{A}$, lois de De Morgan et croissance).
 - Produit cartésien.
 - Propriétés de la divisibilité (réflexivité, antisymétrie, transitivité et compatibilité avec l'addition).
 - Division euclidienne.
 - Algorithme d'Euclide.
 - Relation de Bézout.
 - Algorithme d'Euclide étendu.
 - PGCD de ka et kb .
 - Lien entre $a \wedge b$ et $a \vee b$.
 - Factorisation en nombres premiers.
 - PGCD et PPCM à partir des factorisations en nombres premiers.
-

Démonstrations du cours exigibles :

- Lois de De Morgan pour l'intersection et la réunion.
 - Expression de $A \setminus B$ avec une intersection.
 - Existence et unicité dans la division euclidienne sur $\mathbb{N}$.
 - Pour tous $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $a = bq + r$, $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, r)$ puis $a \wedge b = b \wedge r$.
 - Pour tous $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $d \in \mathbb{Z}$, $[(d \mid a) \wedge (d \mid b)] \iff d \mid a \wedge b$.
 - Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un facteur premier.
 - Montrer que $[1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}, x = 1 + y^2\}$.
 - Montrer que $[(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C)] \implies B = C$.
 - Montrer que la famille $([n, n+1[)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de l'ensemble $\mathbb{R}_+$.
 - Pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ donnés, déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $an + b \mid cn + d$.
 - Résoudre une équation du type $xy = ax + by$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et de paramètres $a, b \in \mathbb{Z}^2$.
 - Résolution guidée d'une équation diophantienne du type $ax + by = c$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et de paramètres $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
 - Démonstration du lemme de Gauss.
 - Démonstration du lemme d'Euclide.
-

Exercices du cours exigibles :

- Déterminer $\bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}} \left[\frac{1}{n}, 1 \right]$ et $\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}} \left[\frac{1}{n}, 1 \right]$.
-

Contenu du cours abordé dans les exercices du khôlleur :

- Chapitre 4 : Ensembles
 - Ensembles et sous-ensembles
 - Intersection et réunion
 - Ensembles disjoints, recouvrement et partition
 - Différence et complémentaire
 - Produit cartésien
- Chapitre 5 : Arithmétique
 - Diviseurs et multiples
 - Division euclidienne
 - PGCD et PPCM (algorithme d'Euclide et algorithme d'Euclide étendu)
 - Nombres premiers