

Chapitre 5 Arithmétique

- ① Diviseurs et multiples.
- ② Division euclidienne.
- ③ PGCD
- ④ PPCM
- ⑤ Nombres premiers

5.1 Diviseurs et multiples

Diviseur et multiple.

Exemples.

Exercice 1.

5.1 Diviseurs et multiples

**Propriétés : réflexivité, antisymétrie, transitivité,
compatibilité avec l'addition**

Démonstration.

Exemples.

Exercice 2.

5.2 Division euclidienne.

Division euclidienne.

Démonstration.

Exemples.

Exercice 3.

5.2 Division euclidienne

Algorithme en Python.

```
def div_eucl(a,b) :  
    q = 0  
    r = a  
    if a >= b :  
        while r >= b :  
            r = r - b  
            q = q + 1  
        else :  
            while r < 0 :  
                r = r + b  
                q = q - 1  
    return q,r
```

Démonstration.

Exemple.

Exercice 4.

5.2 Division euclidienne

Divisibilité et division euclidienne.

Démonstration.

Exemples.

Exercice 5.

Exercice 24.

Exercice 26.

Exercice 30.

Ensemble des diviseurs communs.

Exemple.

Exercice 6.

PGCD.

Exemple.

Exercice 7.

Lemme 1 : $a \wedge b = b \wedge r$.

Démonstration.

Algorithme d'Euclide.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 8.

Relation de Bézout.

Démonstration admise.

On « remonte » l'algorithme d'Euclide.

Exemple.

Exercice 9.

Exercice 10.

Attention à $au + bv = d$.

Exemple.

Diviseur commun et PGCD.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 11.

PGCD et multiplication.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 12.

Ensemble des multiples communs.

Exemple.

Exercice 13.

PPCM.

Dans $\mathbb{N}^*$ à cause de 0. $a \vee 0 = 0$ pour les formules.

Exemple.

Exercice 14.

$$(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|.$$

Démonstration.

Exemples.

Exercice 15.

Exercice 33.

Exercice 38.

Exercice 40.

5.5 Nombres premiers

Nombre premier, nombre composé.

Exemples.

Exercice 16.

5.5 Nombres premiers

Facteur premier.

Exemples.

Exercice 17.

5.5 Nombres premiers

Lemme 2 : $\exists p \in \mathcal{P}, p \mid n$.

Démonstration.

Application au crible d'Erathostène.

Infinité de nombres premiers.

Démonstration.

Exercice 18.

5.5 Nombres premiers

Factorisation en nombres premiers.

Démonstration admise.

Exemples.

Exercice 19.

On note aussi $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} n^{\nu_p(n)}$ avec $\nu_p(n)$ éventuellement nul.

Décomposition et diviseurs.

Démonstration.

Exemples.

Exercice 20.

5.5 Nombres premiers

Nombre de diviseurs.

Démonstration.

Exemples.

Exercice 21.

5.5 Nombres premiers

Décomposition, PGCD et PPCM.

Démonstration.

Exemples.

Exercice 22.

Exercice 43.

Exercice 44.