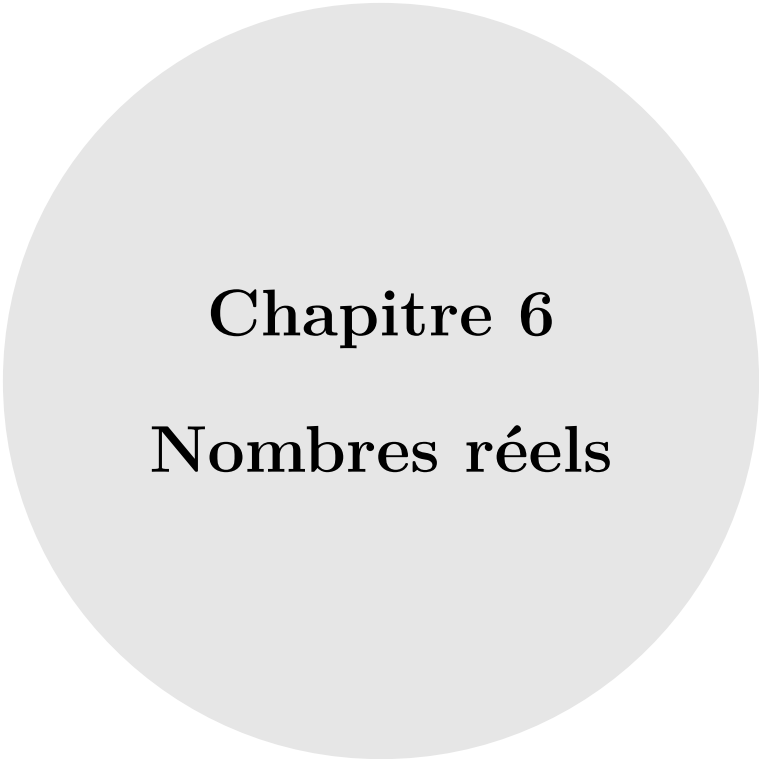




Chapitre 6

Nombres réels

Mathématiques avec M. Cacitti

PCSI du lycée Paul Eluard de Saint-Denis

Année scolaire 2026-2027

1 Inégalités réelles et intervalles

Définition 1 : Inégalités

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- $x \leq y$ si x est inférieur (ou égal) à y .
- $x < y$ si x est strictement inférieur à y .

Remarques.

- Autrement dit, $x < y \iff [x \leq y \wedge x \neq y]$ ou encore $x \leq y \iff [x < y \vee x = y]$.
- Nous pouvons également écrire $y > x$ et $y \geq x$.

Proposition 1 : Propriétés des inégalités réelles

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- **Réflexivité** : $x \leq x$.
- **Antisymétrie** : si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$.
- **Transitivité** : si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.
- **Compatibilité avec l'addition** : si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z$.
- **Compatibilité avec la multiplication** :

★ si $x \leq y$ et $z \geq 0$ alors $xz \leq yz$;

★ si $x \leq y$ et $z \leq 0$ alors $xz \geq yz$.

- **Compatibilité avec le passage à l'inverse** :

★ si $0 < x \leq y$ alors $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$;

★ si $x \leq y < 0$ alors $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$.

Démonstration. On établit les différents points un par un.

Remarques.

- Nous pouvons donc additionner des inégalités : pour tous $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, si $x \leq x'$ et $y \leq y'$ alors $x + y \leq x' + y'$.
- Par contre il faut faire attention aux signes pour multiplier des inégalités : pour tous $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, si $0 \leq x \leq x'$ et $0 \leq y \leq y'$ alors $0 \leq xx' \leq yy'$.
- Nous ne pouvons pas soustraire des inégalités en général. Il faut faire attention à d'abord multiplier par -1 puis additionner.

Exemples.

- Nous avons $1 \leq 2$ et $-3 \leq -2$ mais $1 \times (-3) = -3$ n'est pas inférieur à $2 \times (-2) = -4$.
- Nous avons $1 \leq 2$ et $3 \leq 5$ mais $1 - 3 = -2$ n'est pas inférieur à $2 - 5 = -3$.

Exercice 1. Résoudre l'inéquation $x \leq x^3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Définition 2 : Intervalles réels

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

- **Intervalle fermé** : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- **Intervalle ouvert** : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- **Intervalles semi-ouverts ou semi-fermés** :

★ $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;

★ $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

- **Intervalle semi-ouvert non majoré** : $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$.
- **Intervalle ouvert non majoré** : $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.
- **Intervalle semi-ouvert non minoré** : $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$.
- **Intervalle ouvert non minoré** : $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.

Proposition 2 : Caractérisation des intervalles

Soit $I \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- I est un intervalle.
- Pour tous $x, y \in I$, $[x, y] \subset I$.

Démonstration. On procède par double implication.

Exemple. Les parties $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas des intervalles et $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Remarques.

- L'intersection de deux intervalles est un intervalle.
- La réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle.

Exercice 2. Déterminer les intersections entre les intervalles suivants et simplifier si possible leur réunion.

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|---|
| 1. $[1, 3]$ et $[2, 4]$. | 3. $[-1, 2[$ et $]0, 3]$. | 5. $] - \infty, 2]$ et $[1, +\infty[$. |
| 2. $[-1, 2[$ et $]0, 3]$. | 4. $] - 3, 3]$ et $[0, +\infty[$. | 6. $] - 3, 3]$ et $[4, 5]$. |

2 Valeur absolue

Définition 3 : Valeur absolue

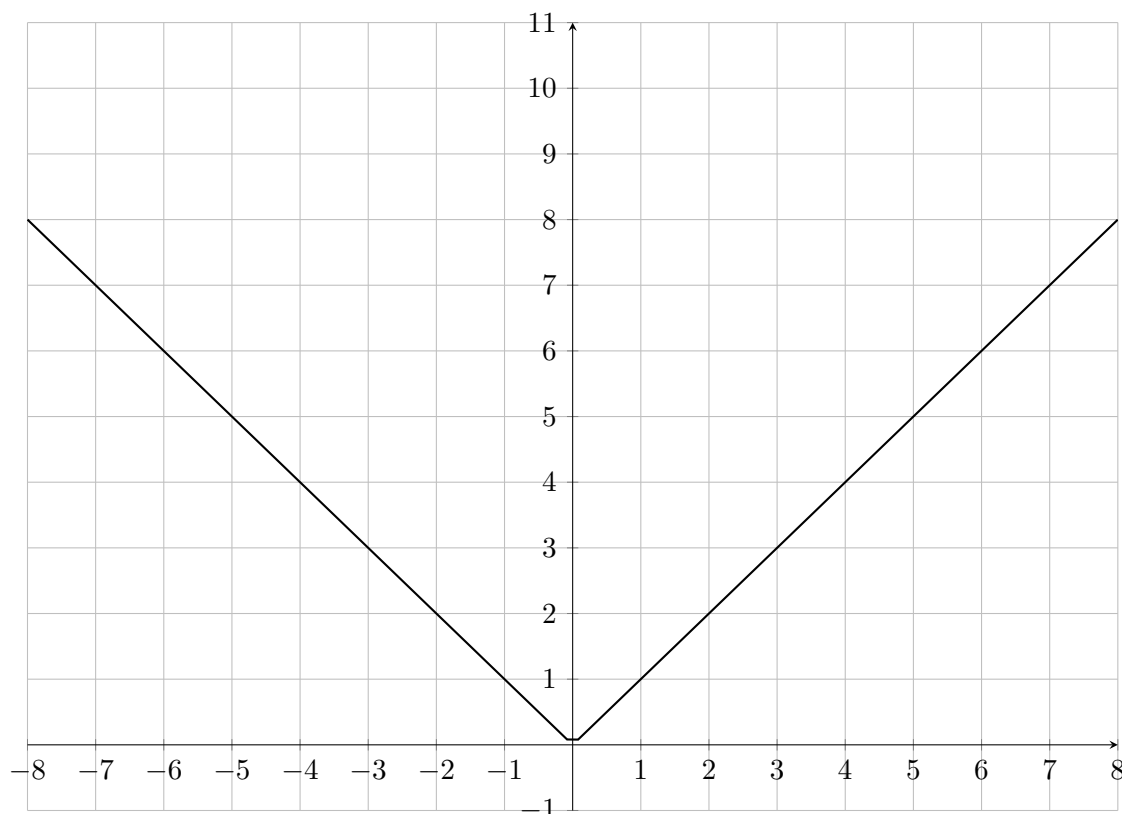
Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x est le réel $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Proposition 3 : Expression de la valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. $|x| = \max(x, -x) = \sqrt{x^2}$.

Démonstration. On procède par disjonction de cas selon si $x \geq 0$ ou $x < 0$.

Remarque. Par construction, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ et la représentation graphique est la suivante.



Exemple. Pour résoudre l'équation $|2x - 1| = |x + 3|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, on raisonne par disjonction des cas.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons $2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ et $x + 3 = 0 \iff x = -3$.

- Soit $x \in]-\infty, -3]$. Donc $2x - 1 \leq 0$ et $x + 3 \leq 0$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } |2x - 1| = |x + 3| &\iff -(2x - 1) = -(x + 3) \\ &\iff x = 5.\end{aligned}$$

Or $5 \notin]-\infty, -3]$ donc l'équation est sans solution sur $]-\infty, -3]$.

- Soit $x \in \left]-3, \frac{1}{2}\right]$. Donc $2x - 1 \leq 0$ et $x + 3 > 0$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } |2x - 1| = |x + 3| &\iff -(2x - 1) = x + 3 \\ &\iff x = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

- Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Donc $2x - 1 \geq 0$ et $x + 3 > 0$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } |2x - 1| = |x + 3| &\iff 2x - 1 = x + 3 \\ &\iff x = 4.\end{aligned}$$

Par conséquent l'ensemble des solutions est $S = \left\{-\frac{2}{3}, 4\right\}$.

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f(x) = |x^2 - 4| - |x + 2| + |x - 3|$ sans valeur absolue.

Proposition 4 : Propriétés de la valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nous avons $|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$.

Démonstration. On procède par disjonction de cas selon si $x \geq 0$ ou $x < 0$.

Remarque. En particulier, pour $a \in \mathbb{R}$, nous avons

$$|x - a| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x - a \leq \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon.$$

Géométriquement, la distance entre x et a est inférieure à ε , autrement dit, x dans l'intervalle centré en a et de rayon ε .

Proposition 5 : Règles de calcul

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- $|xy| = |x||y|$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$.
- Si $y \neq 0$ alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Démonstration.

- On procède par disjonction des cas selon si x et y sont positifs ou négatifs.
- On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
- On procède par disjonction des cas selon si x et y sont positifs ou négatifs.

Proposition 6 : Inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Nous avons égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Démonstration. Pour l'inégalité on utilise des identités remarquables et $xy \leq |xy|$. Pour le cas d'égalité on raisonne par double implication.

Remarque. Puisque $|-y| = |y|$, nous avons $|x - y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si x et y sont de signes opposés. Géométriquement le réel $|x - y|$ s'interprète comme la distance entre x et y .

Exemple. La distance entre 18 et -13 est $|18 - (-13)| = 31$.

Corollaire 1 : Seconde inégalité triangulaire

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Démonstration. On utilise $|x| = |x - y + y|$ et $|y| = |y - x + x|$.

Exercice 4. Soit $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$.
2. Montrer que $\left| \sum_{k=1}^n x_{k+1} \right| - \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq |x_{n+1}| + |x_1|$.

3 Parties majorées et minorées

Définition 4 : Partie majorée et minorée

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que la partie A est **majorée** (resp. **minorée**) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M \quad (\text{resp. } \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x).$$

Dans ce cas, on dit que le réel M est un **majorant** de la partie A (resp. que le réel m est un **minorant** de la partie A).

On dit que la partie A est **bornée** si elle à la fois majorée et minorée.

Remarque. Toute partie majorée (resp. minorée) possède une infinité de majorants (resp. minorants).

Exemple. La partie $A = \left\{ \frac{2n+3}{3n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ est majorée par et minorée par .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout $M \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{2n+3}{3n+2} \leq M \iff 2n+3 \leq M(3n+2) = 3Mn+2M$
 $\iff 3-2M \leq (3M-2)n$

Donc, pour $M = 2$, nous avons $\frac{2n+3}{3n+2} \leq 2 \iff -1 \leq 4n \iff n \geq -\frac{1}{4}$.

Or $n \geq 0 \geq -\frac{1}{4}$ donc $\frac{2n+3}{3n+2} \leq 2$.

Ainsi la partie A est majorée par 2.

- $\frac{2n+3}{3n+2} \geq 0$. Donc la partie A est minorée par 0.

Par conséquent la partie A est bornée entre 0 et 2.

Exercice 5. Montrer que la partie $B = \left\{ \frac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ est bornée.

Proposition 7 : Caractérisation de la bornitude

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- A est bornée.
- $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, |x| \leq M$.

Démonstration. On procède par double implication.

Exemples. La partie A précédente est bornée par 2 : $A \subset [-2, 2]$ et la partie B précédente par 1 : $B \subset [-1, 1]$.

Exercice 6. Montrer que la partie $C = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \mid p, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est bornée.

Définition 5 : Maximum et minimum

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que la partie A admet un **maximum** (resp. un **minimum**) si

$$\exists M \in A, \forall x \in A, x \leq M \quad (\text{resp. } \exists m \in A, \forall x \in A, m \leq x).$$

Remarque. Une partie admettant un maximum est majorée mais une partie majorée n'admet pas toujours un maximum.

Exemples. On considère la partie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$.

1. Déterminer si la partie A admet un maximum et un minimum.
2. Même question pour $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$.

Exercice 7. On considère la partie $B = \left\{ \frac{n}{mn+1} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. La partie B est-elle minorée ? Majorée ?
2. Admet-elle un minimum ? Un maximum ?

Proposition 8 : Unicité du maximum et du minimum

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si la partie A admet un maximum (resp. un minimum) alors il est unique.

On le note alors $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).

Démonstration. On suppose que la partie A admet deux maxima M_1, M_2 puis on montre que $M_1 = M_2$.

Proposition 9 : Partie finie

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si la partie A est non vide et admet un nombre fini d'éléments alors elle admet un minimum et un maximum. En particulier elle est bornée.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le cardinal de la partie $A : \mathcal{P}(n)$: « Toute partie de $\mathbb{R}$ à n éléments admet un maximum. ».

Remarque. Concrètement, si A est une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal $n \geq 1$ alors on peut ordonner ses éléments et écrire $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ avec $a_1 < \dots < a_n$. Dans ce cas, $\min(A) = a_1$ et $\max(A) = a_n$.

Corollaire 2 : Parties de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.
2. Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.
3. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.

Démonstration. On commence par la propriété 2 : Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$. Alors il existe $n_0 \in A$ et un minorant $m \in \mathbb{R}$. Ainsi la partie $A \cap [m, n_0]$ est une partie non vide et finie. Donc on peut appliquer la proposition précédente. La propriété 1 en découle et la propriété 3 se démontre de manière similaire.

Exercice 8. Montrer que toute suite décroissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est constante à partir d'un certain rang.

4 Partie entière

Définition 6 : Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **partie entière** du réel x est l'entier

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Autrement dit, il s'agit du plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Exemples. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ et $\lfloor -\sqrt{5} \rfloor = -3$.

Proposition 10 : Caractérisation de la partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors sa partie entière $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$.

Démonstration. On montre $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ grâce à la définition d'un maximum. L'unicité vient de l'unicité d'un maximum.

Remarque. Nous avons donc

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exercice 9. Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Proposition 11 : Propriétés de la partie entière

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

- Si $n \leq x$ alors $n \leq \lfloor x \rfloor$.
- $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

Démonstration.

- On utilise la définition de la partie entière.
- On utilise la caractérisation de la partie entière.

Remarque. La partie entière n'a pas de bonnes propriétés de calcul par rapport à l'addition et la multiplication : en général, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et $\lfloor xy \rfloor \neq \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor$.

Exemples. $\lfloor \sqrt{2} + 4 \rfloor = \lfloor \sqrt{2} \rfloor + 4 = 5$ et $\lfloor \pi - 4 \rfloor = \lfloor \pi \rfloor - 4 = -1$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Développer $(3 + \sqrt{5})^n$ et $(3 - \sqrt{5})^n$.
2. En déduire que $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair.
3. Montrer que $\lfloor (3 + \sqrt{5})^n \rfloor$ est un entier impair.

5 Nombres décimaux

Définition 7 : Nombre décimal

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que le réel x est un nombre **décimal** s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$x = \frac{p}{10^k}.$$

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Exemples. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n = \frac{n}{10^0}$. Pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\frac{p}{2^k} = \frac{p5^k}{2^k5^k} = \frac{p5^k}{10^k} \in \mathbb{D}$ et $\frac{p}{5^k} = \frac{p2^k}{10^k} \in \mathbb{D}$.

Proposition 12 : Propriétés

L'ensemble $\mathbb{D}$ contient $\mathbb{Z}$ et il est stable par somme et produit.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $n = \frac{n}{10^0} \in \mathbb{D}$. Pour $x = \frac{p}{10^k} \in \mathbb{D}$ et $y = \frac{q}{10^\ell} \in \mathbb{D}$, les réels $x + y$ et $x \times y$ s'écrivent également de la manière voulue.

Exercice 11. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer que $\frac{p}{q} \in \mathbb{D}$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2^a 5^b$.

Proposition 13 : Approximation décimale

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d_n(x) = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Alors $d_n(x) \in \mathbb{D}$ et

$$d_n(x) \leq x < d_n(x) + \frac{1}{10^n}.$$

Les nombres $d_n(x)$ et $d_n(x) + \frac{1}{10^n}$ sont appelés les **approximations décimales** du réel x par défaut et par excès à 10^{-n} près.

Démonstration. On utilise les propriétés de la partie entière.

Exemple. Pour $x = \pi$ et $n = 2$, nous avons $\lfloor 10^2 x \rfloor = 314$.

Donc $d_n(x) = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = 3,14$ et $d_n(x) + \frac{1}{10^n} = 3,15$.

Nous avons bien $3,14 \leq \pi < 3,15$.

Corollaire 3 : Densité des décimaux dans les réels

L'ensemble $\mathbb{D}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$: pour tous réels a et b tels que $a < b$,

$$]a, b[\cap \mathbb{D} \neq \emptyset.$$

Autrement dit, pour tous réels a et b , il existe un décimal d tel que $a < d < b$.

Démonstration. On utilise la limite de l'approximation décimale $(d_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de $x = \frac{a+b}{2}$.

Exercice 12. Expliciter une suite de décimaux $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers le nombre e .

6 Nombres rationnels

Définition 8 : Nombre rationnel et nombre irrationnel

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que le réel x est :

- **rationnel** s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que

$$x = \frac{p}{q} ;$$

- **irrationnel** sinon.

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels.

Remarque. Nous avons les inclusions strictes suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Exemples.

- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$.
- $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10} \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$.
- $-1, -2, -3 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Proposition 14 : Propriétés

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- Si $x, y \in \mathbb{Q}$ alors $x + y, x \times y \in \mathbb{Q}$.
- Si $x \in \mathbb{Q}^*$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $x + y, x \times y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration. Pour montrer l'appartenance à $\mathbb{Q}$, on raisonne directement. Pour montrer l'appartenance à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on raisonne par l'absurde.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff \exists m \in \mathbb{N}, n = m^2$.

Proposition 15 : Densité des rationnels et des irrationnels dans les réels

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$: pour tous réels a et b tels que $a < b$,

$$]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad]a, b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset.$$

Démonstration. Pour la densité des rationnels : $]a, b[\cap \mathbb{Q} \supset]a, b[\cap \mathbb{D} \neq \emptyset$.

Pour la densité des irrationnels : on adapte l'approximation décimale de $x \in]a, b[$ pour obtenir des irrationnels qui seront dans $]a, b[$ à partir d'un certain rang.

Exercice 14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $a < x < r < b$.

7 Bornes supérieures et inférieures

Définition 9 : Borne supérieure et borne inférieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que la partie A admet :

- une **borne supérieure** si elle admet un plus petit majorant ;
- une **borne inférieure** si elle admet un plus grand minorant.

Exemple. $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ admet 0 comme borne inférieure et 0 n'est pas un maximum.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x} > 0$.

Puis, pour $M \in \mathbb{R}$ un minorant de la partie A , nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $M \leq \frac{1}{x}$.

Donc, en faisant tendre x vers $+\infty$, nous obtenons $M \leq 0$.

Par conséquent $\inf(A) = 0$.

Lemme 1 : Unicité de la borne

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si la partie A admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure) alors elle est unique que l'on note $\sup(A)$ (resp. $\inf(A)$).

Démonstration. On suppose que la partie A admet deux bornes supérieures M, M' et on montre que $M = M'$.

Remarques.

- Autrement dit :
 - ★ $\sup(A)$ est un majorant de la partie A :

$$\forall a \in A, a \leq \sup(A).$$

★ Pour tout majorant M de la partie A , $\sup(A) \leq M$.

- Ainsi, pour montrer une inégalité du type $\sup(A) \leq M$ où $M \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer que M est un majorant de A ($\forall x \in A, x \leq M$) puis de passer à la borne supérieure.
- Par contre si, pour $M \in \mathbb{R}$, nous avons, pour tout $x \in A$, $x < M$ alors nous pouvons seulement en déduire que $\sup(A) \leq M$. On dit que le passage à la borne supérieure élargit les inégalités.

Exercice 15. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de la partie $A = \left\{ (-1)^n + \frac{2^n + 1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Théorème 1 : Existence d'une borne supérieure et d'une borne inférieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si la partie A est majorée alors elle admet une borne supérieure.
- Si la partie A est minorée alors elle admet une borne inférieure.

Démonstration admise.

Remarques. On adopte les conventions suivantes.

- Si la partie A est non vide et non majorée alors on définit $\sup(A) = +\infty$.
- Si la partie A est non vide et non minorée alors on définit $\inf(A) = -\infty$.

Exemples. $\sup([1, +\infty[) = +\infty$ et $\inf([1, +\infty[) = \inf([1, +\infty]) = 1$.

Proposition 16 : Caractérisation de la borne supérieure

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- $\alpha = \sup(A)$.
- α est un majorant de A et : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.

Démonstration. On procède par double implication.

Remarques.

- L'assertion « $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$. » signifie que l'on peut trouver des éléments de A aussi proches de α que l'on veut.
- De même nous avons la caractérisation de la borne inférieure. Soient A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

$$\star \beta = \inf(A).$$

$\star \beta$ est un minorant de A et : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in A, \beta \leq x < \beta + \varepsilon$.

Exemple. La borne inférieure de la partie $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ est .

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n + \frac{1}{n+1} \geq -1 + 0 = -1$.

Donc -1 est un minorant de la partie A .

Puis, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $-1 + \varepsilon > -1$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n = 2k + 1$, $(-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1+1} = -1 + \frac{1}{2k+2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\searrow} -1 + 0 = -1$.

Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1+1} < -1 + \varepsilon$.

Ainsi, pour $n = 2k + 1$, $(-1)^n + \frac{1}{n+1} \in A$ et $-1 \leq (-1)^n + \frac{1}{n+1} < -1 + \varepsilon$.

Par conséquent $\inf(A) = -1$.

Exercice 16. Déterminer la borne supérieure de la partie $B = \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Corollaire 4 : Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- $\alpha = \sup(A)$.
- α est un majorant de A et il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.

Démonstration. On procède par double implication.

Remarque. De même nous avons la caractérisation séquentielle de la borne inférieure. Soient A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- $\beta = \inf(A)$.
- β est un minorant de A et il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta$.

Exemple. L'ensemble $A = \left\{ \frac{x}{x+1} \mid x \in \mathbb{R}_+ \right\}$ admet 1 comme borne supérieure.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{x}{x+1} \leq 1$.

Et, pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n)_{n \in \mathbb{N}}$, nous avons $\frac{x_n}{x_n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc $\sup(A) = 1$.

Exercice 17. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On définit $B = \{|x - y| \mid x, y \in A\}$.

1. Montrer que la partie B est majorée.
2. On note $\delta(A) = \sup(B)$. Montrer que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

8 Exercices

8.1 Inégalités réelles

Exercice 18. Résoudre les inéquations réelles suivantes.

1. $x - 1 \leq \sqrt{x + 2}$
2. $(2x - 7) \ln(x + 1) > 0$
3. $\ln\left(\frac{x + 1}{3x - 5}\right) \leq 0$

Exercice 19. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$.
2. Montrer que si $x > 0$ alors $x \ln(x) \geq -\frac{1}{e}$.

Exercice 20. Soient $x, y \in [0, 1]$. Montrer que $x^2 + y^2 - xy \leq 1$.

Exercice 21. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$.
3. Que peut-on conclure sur la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$?

8.2 Valeur absolue

Exercice 23. Résoudre les équations et inéquations réelles suivantes.

- | | | |
|---------------------|----------------------------|--|
| 1. $ x + 3 = 5$ | 3. $ x + 2 > 7$ | 5. $ x + 1 + x - 3 \leq 6$ |
| 2. $ x + 3 \leq 5$ | 4. $ 2x - 4 \leq x + 2 $ | 6. $\left \frac{1}{x} - 6\right \leq 3$ |

Exercice 24. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
2. Montrer que $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Exercice 25. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1. $ x + 12 = x^2 - 8 $ | 2. $ x + 12 \leq x^2 - 8 $ |
|---------------------------|------------------------------|

Exercice 26. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)| \geq 1$.

Exercice 27. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Montrer que $|\max(a, b) - \max(c, d)| \leq \max(|a - c|, |b - d|)$.

8.3 Partie entière

Exercice 28. Résoudre l'équation $\lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor -x + 5 \rfloor$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 29. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor$.

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 30. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 31. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{1}{a} \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$.

Exercice 32. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Montrer que $|[a, b] \cap \mathbb{Z}| = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor + 1$.

8.4 Nombres décimaux et rationnels

Exercice 33. Déterminer si les nombres suivants sont décimaux ou pas.

1. $a = \frac{21}{40}$
2. $b = \frac{17}{75}$
3. $c = \frac{91}{125}$
4. $d = \frac{14}{45}$

Exercice 34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ est-il décimal ?

Exercice 35. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$. On définit $a_0 = \lfloor x \rfloor$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k 10^{-k}$.

1. Donner la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $x = 1,2345$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$.
4. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Exercice 36. Déterminer les nombres rationnels des nombres suivants donnés par leur développement décimal illimité.

1. $a = 1,4444444...4...$
2. $b = 0,15212121...21...$
3. $c = 12,24444...4...$
4. $d = 0,746464...64...$

Exercice 37. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $x \in \mathbb{Q} \implies x^2 \in \mathbb{Q}$.
2. Etudier la réciproque.

Exercice 38. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x + y \in \mathbb{Z}$ et $x^2 + y^2 \in \mathbb{Z}$. Le but de cet exercice est de montrer que $xy \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer qu'il existe $p, r \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{r}{q}$ avec $\text{PGCD}(p, r, q) = 1$.
2. Montrer que $q^2 \mid 2pr$.
3. En déduire que $q = 1$ et conclure.

8.5 Parties majorées

Exercice 39. Majorer l'ensemble $A = \{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ dans les cas suivants.

1. $f : t \mapsto e^{-2t}$
2. $f : t \mapsto \frac{\sqrt{2-t}}{t-3}$
3. $f : t \mapsto t \ln(1+t)$
4. $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{1+t}$
5. $f : t \mapsto \sin(t^2)$
6. $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

Exercice 40. On considère l'ensemble $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Déterminer un minorant et majorant de l'ensemble A de façon grossière.
2. Montrer que $\frac{1}{4}$ est un majorant plus précis.

Exercice 41. Déterminer les bornes supérieures, inférieures, maxima ou minima des ensembles suivants lorsqu'ils existent.

1. $[2, 6[$
2. $[1, 2[\cup]3, +\infty[$
3. $\llbracket 1, n \rrbracket$
4. $\{2p \mid p \in \llbracket 1, 9 \rrbracket\}$
5. $\left\{ \frac{1}{x} \mid x \in [2, 3] \right\}$
6. $\{ \lfloor x \rfloor \mid x \in [1, +\infty[\}$
7. $\mathbb{R} \setminus [1, +\infty[$
8. $\left\{ \frac{x}{2} + k \mid x \in [0, 1[, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \right\}$

Exercice 42. Montrer que les ensembles suivants sont minorés et majorés. Déterminer leurs bornes inférieures et supérieures.

1. $A = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$
2. $B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$
3. $C = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Exercice 43. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ non vide et majorées.

1. Montrer que les réels $\sup(A)$, $\sup(B)$ et $\sup(A \cup B)$ existent et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. On note $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 44. Déterminer les bornes supérieures, inférieures, maxima et minima des ensembles suivants lorsqu'ils existent.

1. $A = \left\{ \frac{x+1}{x+2} \mid x \in]-\infty, -3] \right\}$
2. $B = \left\{ \frac{2xy}{x^2 + y^2} \mid x, y \in \mathbb{R}^* \right\}$

Exercice 45. Soient $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ non vide, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $C = \lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$.

1. Montrer que A est bornée si et seulement si C est bornée.
2. Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\sup(C) = \lambda \sup(A)$ et $\inf(C) = \lambda \inf(A)$.
3. Que se passe-t-il si $\lambda < 0$?

Exercice 46. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ non vides et $C = AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que si A et B sont bornées alors C également.
2. Que peut-on dire de la réciproque?
3. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$ alors $\sup(C) = \sup(A) \sup(B)$ et $\inf(C) = \inf(A) \inf(B)$.
4. Que se passe-t-il si l'on ne suppose pas que $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$?

Exercice 47. Soit I un intervalle ouvert non vide. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas deux intervalles I_1 et I_2 ouverts non vides formant une partition de l'intervalle I ($I = I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$). On raisonne par l'absurde en considérant I_1 et I_2 deux tels intervalles.

Soient $a \in I_1$ et $b \in I_2$. On considère l'ensemble $E = \{t \in [0, 1] \mid a + t(b - a) \in I_1\}$.

1. Montrer que l'ensemble E admet une borne supérieure.
2. Montrer que $a + T(b - a) \notin I_1$.
3. En déduire que $a + T(b - a) \in I_2$.
4. En déduire une contradiction avec la définition de T .

Table des matières

1	Inégalités réelles et intervalles	2
2	Valeur absolue	3
3	Parties majorées et minorées	5
4	Partie entière	7
5	Nombres décimaux	8
6	Nombres rationnels	9
7	Bornes supérieures et inférieures	10
8	Exercices	12

Programme officiel de ce chapitre

Contenus	Capacités et commentaires
Nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction des ensembles de nombres usuels, en particulier celle de $\mathbb{R}$, est hors programme.
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $ x - a \leq b$.
Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées.	
Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
Borne supérieure (resp. inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.	Notations $\sup X, \inf X$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.	