

Chapitre 6 Nombres réels

- ① Inégalités réelles et intervalles
- ② Valeur absolue
- ③ Parties majorées et minorées
- ④ Partie entière
- ⑤ Nombres décimaux
- ⑥ Nombres rationnels
- ⑦ Bornes supérieures et inférieures

6.1 Inégalités réelles et intervalles

Inégalités.

Propriétés.

Exercice 1.

Intervalles réels.

Caractérisation des intervalles.

Démonstration.

6.2 Valeur absolue

Valeur absolue.

Expression : $|x| = \max(x, -x) = \sqrt{x^2}$.

Démonstration.

Exemple d'équation.

Exercice 3.

6.2 Valeur absolue

Propriétés de la valeur absolue.

Démonstration.

Règles de calcul.

Inégalité triangulaire.

Démonstration.

Nous avons également $|x - y| \leq |x| + |y|$.

Géométriquement $|x - y|$ est la distance entre x et y .

Exemple.

Seconde inégalité triangulaire.

Démonstration.

Exercice 4.

Exercice 18.

Exercice 20.

Exercice 23.

Exercice 24.

6.3 Parties majorées et minorées

Partie majorée, minorée et bornée.

Un majorant et un minorant ne sont pas uniques.

Exemple.

Exercice 5.

Caractérisation de la bornitude.

Démonstration.

Exercice 6.

6.3 Parties majorées et minorées

Maximum et minimum.

Maximum $\implies$ majorée mais la réciproque est fausse.

Exemple.

Exercice 7.

Unicité du maximum et du minimum.

Démonstration.

6.3 Parties majorées et minorées

Partie finie.

Démonstration.

Corollaire sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Démonstration.

Exercice 8.

Partie entière.

Exemples.

Caractérisation de la partie entière.

Démonstration.

Exercice 9.

Propriétés de la partie entière.

Démonstration

Attention en général $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et $\lceil x + y \rceil \neq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$.

Exemples.

Exercice 10.

Exercice 39.

Exercice 40.

Exercice 28.

Exercice 30.

6.5 Nombres décimaux

Nombre décimal.

Stabilité par somme et produit.

Démonstration.

Exercice 11.

Approximation décimale.

Démonstration.

Corollaire : Densité des décimaux.

Démonstration.

Exercice 12.

6.6 Nombres rationnels

Nombres rationnel et irrationnel.

Exemples.

Propriétés.

Démonstration.

Exercice 13.

Densité des rationnels.

Démonstration.

Exercice 14.

Exercice 33.

Exercice 34.

Exercice 36.

Exercice 37.

6.7 Bornes supérieures et inférieures

Bornes supérieure et inférieure.

Exemple.

Lemme : Unicité des bornes supérieure et inférieure.

Démonstration.

Pour montrer que $\sup(A) \leq M$,
on montre que, pour tout $x \in A$, $x \leq M$.

Exercice 15.

6.7 Bornes supérieures et inférieures

Existence de bornes supérieure et inférieure.

Démonstration admise.

Caractérisation de la borne supérieure.

Démonstration.

Exercice 16.

Caractérisation séquentielle.

Démonstration.

Exemple.

Exercice 17.

Exercice 41.

Exercice 42.

Exercice 43.

Exercice 44.