

Programme de khôlle 5 et d'interrogation du 12 au 16 octobre

Une **khôlle** de mathématiques en PCSI se déroule de la façon suivante.

- L'écriture de l'**énoncé** d'une définition ou d'un résultat du cours.
- La réalisation de la **démonstration** d'un résultat ou d'un **exercice du cours**.
- Un ou deux **exercices** choisis par le khôlleur.

Une **interrogation** en PCSI se déroule de la façon suivante.

- L'écriture de l'**énoncé** d'un ou deux définitions/résultats du cours.
 - La réalisation de la **démonstration** d'un résultat ou d'un **exercice du cours**.
 - La durée de l'interrogation est de 25 minutes.
-

Définitions et résultats du cours exigibles :

- Propriétés de la divisibilité (réflexivité, antisymétrie, transitivité et compatibilité avec l'addition).
 - Division euclidienne.
 - Algorithme d'Euclide.
 - Relation de Bézout.
 - Algorithme d'Euclide étendu.
 - PGCD de ka et kb .
 - Lien entre $a \wedge b$ et $a \vee b$.
 - Factorisation en nombres premiers.
 - PGCD et PPCM à partir des factorisations en nombres premiers.
 - Inégalité triangulaire avec cas d'égalité.
 - Seconde inégalité triangulaire.
 - Partie majorée, minorée ou bornée.
 - Maximum et minimum.
 - Partie entière (définition ou caractérisation).
 - Nombre décimal ou rationnel.
 - Approximations décimales d'un réel.
 - Densité de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{Q}$) dans $\mathbb{R}$.
-

Démonstrations du cours exigibles :

- Existence et unicité dans la division euclidienne sur $\mathbb{N}$.
- Pour tous $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $a = bq + r$, $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, r)$ puis $a \wedge b = b \wedge r$.
- Pour tous $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $d \in \mathbb{Z}$,
 $[(d \mid a) \wedge (d \mid b)] \iff d \mid a \wedge b$.
- Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un facteur premier.
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité.
- Seconde inégalité triangulaire.
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, A bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leq M$.
- Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
 - ★ $x, y \in \mathbb{Q} \implies x + y, x \times y \in \mathbb{Q}$;
 - ★ $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \implies x + y \notin \mathbb{Q}$;
 - ★ $x \in \mathbb{Q}^*, y \notin \mathbb{Q} \implies x \times y \notin \mathbb{Q}$.

Exercices du cours exigibles :

- Pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ donnés, déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $an + b \mid cn + d$.
 - Résoudre une équation du type $xy = ax + by$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et de paramètres $a, b \in \mathbb{Z}^2$.
 - Résolution guidée d'une équation diophantienne du type $ax + by = c$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et de paramètres $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
 - Démonstration du lemme de Gauss.
 - Démonstration du lemme d'Euclide.
 - Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f(x) = |x^2 - 4| + |x + 2| + |x - 3|$ sans valeur absolue.
 - Montrer qu'une suite décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}$ est constante à partir d'un certain rang.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair puis que $\lfloor (3 + \sqrt{5})^n \rfloor$ est un entier impair.
 - Montrer que, pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, $\frac{p}{q} \in \mathbb{D}$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $q = 2^a 5^b$.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff \exists m \in \mathbb{N}, n = m^2$.
-

Contenu du cours abordé dans les exercices du khôlleur :

- Chapitre 5 : Arithmétique
 - Diviseurs et multiples
 - Division euclidienne
 - PGCD et PPCM (algorithme d'Euclide et algorithme d'Euclide étendu)
 - Nombres premiers
- Chapitre 6 : Nombres réels
 - Inégalités et intervalles
 - Valeur absolue
 - Parties majorées et minorées (avec maximum et minimum mais pas encore les bornes supérieures et inférieures)
 - Partie entière
 - Nombres décimaux et nombres rationnels