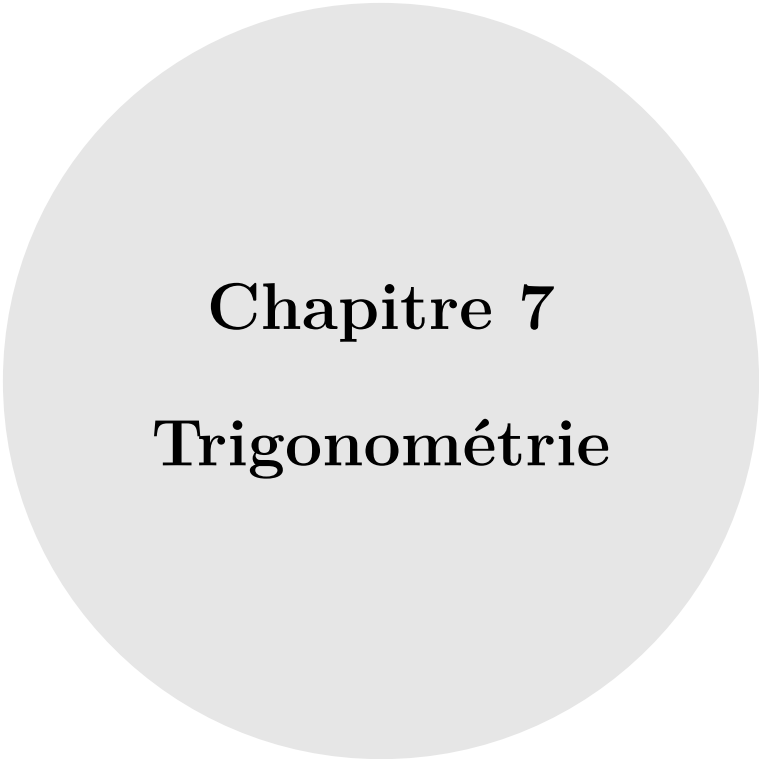




Chapitre 7

Trigonométrie

Mathématiques avec M. Cacitti

PCSI du lycée Paul Eluard de Saint-Denis

Année scolaire 2026-2027

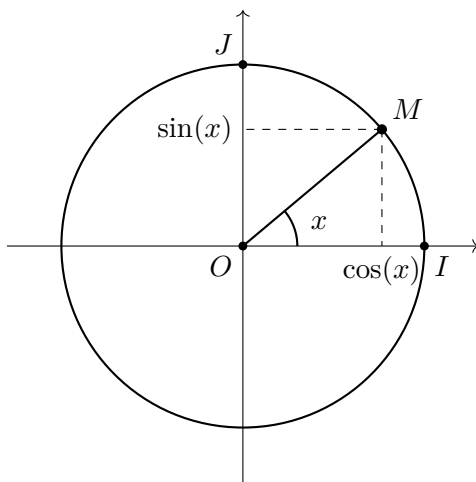
1 Cercle trigonométrique

Définition 1 : Cosinus, sinus et tangente

Soient $x \in \mathbb{R}$ et M son point image sur le cercle trigonométrique.

- Le **cosinus** de x , noté $\cos(x)$, est l'abscisse du point M .
- Le **sinus** de x , noté $\sin(x)$, est l'ordonnée du point M .
- La **tangente** de x , notée $\tan(x)$, est définie par, lorsque $\cos(x) \neq 0$,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



Proposition 1 : Cosinus, sinus et tangente des angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	0

Démonstration. On raisonne avec des triangles dans le cercle trigonométrique et le théorème de Pythagore.

Exemples. Grâce au cercle trigonométrique, nous avons également :

- $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 1. Déterminer les cosinus, sinus et tangente des angles suivants.

1. $-\frac{\pi}{2}$

2. $\frac{2\pi}{3}$

3. $-\frac{3\pi}{4}$

4. $\frac{11\pi}{6}$

2 Propriétés des cosinus, sinus et tangente

Proposition 2 : Propriétés des cosinus et sinus

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
- $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $|\cos(x)| \leq 1$
- $|\sin(x)| \leq 1$
- $|\sin(x)| \leq |x|$

Démonstration. On utilise le cercle trigonométrique et une disjonction de cas pour le dernier point.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\sin(x)$.

Proposition 3 : Propriétés des cosinus et sinus

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Démonstration. En utilisant le cercle trigonométrique et des symétries axiales.

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression $\cos(-x) + \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Proposition 4 : Propriétés de tangente

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Le réel $\tan(x)$ est bien défini si et seulement si $\cos(x) \neq 0$ si et seulement si $x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Autrement dit,

$$D_{\tan} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[.$$

Si $x \in D_{\tan}$ alors $-x, \pi + x, \pi - x, x + k\pi \in D_{\tan}$ et :

- $\tan(-x) = -\tan(x)$;
- $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$;
- $\tan(\pi + x) = \tan(x)$;
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$.

Démonstration. On se sert des relations sur cos et sin.

Exercice 4. Déterminer les propriétés similaires de $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sin(x) \neq 0$.

3 Formules trigonométriques

Proposition 5 : Formules d'addition et de soustraction

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Si $a, b \in D_{\tan}$, $a + b, a - b \in D_{\tan}$ alors :

- $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$;
- $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

Démonstration.

- On considère les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ où A et B sont sur le cercle trigonométrique d'angles respectifs a et b . On se sert du produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ avec deux formules différentes pour montrer que $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$. On en déduit le premier point grâce à $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$.
- Pour $\sin(a + b)$, on se sert de $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et de $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple. $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ donc $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$= 0 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 5. Déterminer cosinus, sinus et tangente du réel $\frac{5\pi}{12}$ grâce à une formule d'addition.

Corollaire 1 : Formules de duplication

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Si $a \in D_{\tan}$ tel que $2a \in D_{\tan}$ alors $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

Démonstration. On applique les formules d'addition avec $a = b$.

Corollaire 2 : Formules de linéarisation

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{-\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

Démonstration. On effectue des combinaisons avec les formules d'addition et de soustraction.

Exercice 6. Déterminer cosinus, sinus et tangente du réel $\frac{\pi}{12}$ grâce à une formule de linéarisation.

Corollaire 3 : Formules de Simpson ou de factorisation

Soient $p, q \in \mathbb{R}$.

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Démonstration. On utilise les formules de linéarisation avec $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$.

Remarque. Il peut être utile d'écrire sous forme factorisée lorsqu'on étudie le signe d'une expression ou les solutions d'une équation égale à 0.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\cos(3x) + \cos(x) = 2\cos(2x)\cos(x)$.

Exercice 7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire, sous forme factorisée, les expressions suivantes.

1. $\cos(5x) + \cos(4x)$
2. $\cos(3x) - \cos(2x)$
3. $\sin(6x) + \sin(x)$
4. $\sin(7x) - \sin(8x)$
5. $\cos(x) + \sin(x)$

Proposition 6 : Transformation trigonométrique

Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$a\cos(x) + b\sin(x) = A\cos(x - \varphi).$$

Démonstration. Si $a = b = 0$ alors le résultat est direct. Sinon on factorise l'expression $a \cos(x) + b \sin(x)$ par $A = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ puis on utilise que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ appartient au cercle trigonométrique.

Remarque. Autrement dit, on écrit

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) \right)$$

puis on détermine, si possible, $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemple. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = 3 \cos(x) - 3\sqrt{3} \sin(x)$.

Alors on factorise par $\sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$.

$$\text{Donc } f(x) = 3 \cos(x) - 3\sqrt{3} \sin(x) = 6 \left(\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) \right).$$

Puis on cherche $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Un tel φ est, par exemple, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Ainsi } f(x) = 6 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(x) \right) = 6 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Par conséquent $A = 6$ et $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ conviennent pour obtenir $f(x) = A \cos(x - \varphi)$.

Exercice 8. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = -2\sqrt{3} \cos(x) - 2 \sin(x)$.

Déterminer $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = A \cos(x - \varphi)$.

4 Equations trigonométriques

Définition 2 : Egalité modulaire

Soient $x, x' \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}^*$. On dit que x et x' sont **égaux modulo T** , ce qu'on note $x' \equiv x [T]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x' = x + kT.$$

Exemples.

$$\bullet \quad 2\pi \equiv 0 [2\pi] \qquad \bullet \quad -\frac{\pi}{4} \equiv \frac{7\pi}{4} [2\pi] \qquad \bullet \quad \frac{17\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3} [2\pi] \qquad \bullet \quad -\frac{31\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Exercice 9. Déterminer le réel x dans $[0, 2\pi[$ puis dans $] -\pi, \pi]$ pour avoir $a \equiv x [2\pi]$ pour les réels a suivant.

$$1. \quad 31\pi \qquad 2. \quad \frac{31\pi}{2} \qquad 3. \quad -\frac{31\pi}{3} \qquad 4. \quad -\frac{31\pi}{6}$$

Proposition 7 : Propriétés de l'égalité modulaire

Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $T, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

- $x \equiv x' [T] \iff x - x' \equiv 0 [T]$
- $\lambda x \equiv \lambda x' [T] \iff x \equiv x' \left[\frac{T}{\lambda} \right]$
- $[x \equiv x' [T] \wedge y \equiv y' [T]] \implies [x + y \equiv x' + y' [T] \wedge xy \equiv x'y' [T]]$

Démonstration. On raisonne grâce à la définition de l'égalité modulaire.

Exercice 10. Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la proposition suivante est fausse :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xy \equiv 0 [T] \implies [x \equiv 0 [T] \vee y \equiv 0 [T]];$$

Proposition 8 : Equations trigonométriques

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\cos(x) = \cos(y) \iff [x \equiv y [2\pi]] \vee [x \equiv -y [2\pi]]$
- $\sin(x) = \sin(y) \iff [x \equiv y [2\pi]] \vee [x \equiv \pi - y [2\pi]]$
- Si $x, y \in D_{\tan}$ alors $\tan(x) = \tan(y) \iff x \equiv y [\pi]$.

Démonstration. On procède par double implication.

Exemples. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
 $\iff x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \vee x \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$
 $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k.$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Si $x \in D_{\tan}$ alors $\tan(x) = 1 \iff \tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$
 $\iff x \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$
 $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $\tan(x) = 1$ est $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 11. Résoudre l'équation $2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Nous pouvons également résoudre des inéquations trigonométriques de façon similaire. Le plus simple est d'étudier l'inégalité sur un intervalle réduit qui se répète par périodicité.

Exemple. On s'intéresse à l'inéquation $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ d'inconnue réelle x .

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{\pi}{4} \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ i.e. $x \not\equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 &\iff x + \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[[\pi] \\ &\iff x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[[\pi]. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right[$.

Exercice 12. Résoudre l'inéquation $\cos(2x) \geq 0$.

Remarque. Il est également possible d'utiliser les formules de Simpson dans certains cas avec des additions ou soustractions de cosinus ou sinus. Notamment si l'on souhaite résoudre des équations égales à 0 ou étudier le signe d'une expression.

Exemple. L'équation $\cos(3x) + \cos(x) = 0$ admet $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ comme ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{En effet, pour tout } x \in \mathbb{R}, \cos(3x) + \cos(x) = 0 &\iff 2\cos(2x)\cos(x) = 0 \\ &\iff \cos(2x) = 0 \vee \cos(x) = 0 \\ &\iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \vee x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right] \vee x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]. \end{aligned}$$

Exercice 13. Résoudre l'inéquation $\sin(3x) + \sin(x) \geq 0$ d'inconnue $x \in [0, 2\pi]$ puis d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

5 Exercices

5.1 Cercle trigonométrique

Exercice 14. Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes.

$$1. \cos\left(\frac{538\pi}{3}\right) \qquad 2. \sin\left(\frac{123\pi}{6}\right) \qquad 3. \tan\left(-\frac{77\pi}{4}\right)$$

Exercice 15. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 16. Déterminer la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 17. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2 \leq \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) \leq 2$.

Exercice 18. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $|\sin(nx)| < n|\sin(x)|$.

5.2 Formules trigonométriques

Exercice 19. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour quel(s) x , a-t-on $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ bien défini ?
2. Dans ce cas, montrer les formules suivantes.

$$(a) \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad (b) \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad (c) \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

si $x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Exercice 20. On cherche à déterminer tous les réels x tels que $\cos(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution x_0 dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.
2. Calculer $\cos(2t_0)$ puis démontrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.
3. En déduire t_0 .
4. Conclure quant au problème.

5.3 Equations trigonométriques

Exercice 21. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\sin(2x) + \sin(x) = 0$
2. $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$
3. $\cos(3x) + \sin(x) = 0$
4. $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$

Exercice 22. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(x) > 0$
2. $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$

Exercice 23. Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x .

1. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$
2. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2x)$
3. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan(2x)$

Exercice 24. Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x .

1. $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4}$
2. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$
3. $\cos(3x) = \sin(x)$
4. $\tan(x) = 2\sin(x)$

Table des matières

1	Cercle trigonométrique	2
2	Propriétés des cosinus, sinus et tangente	2
3	Formules trigonométriques	3
4	Equations trigonométriques	5
5	Exercices	7

Programme officiel de ce chapitre

Contenus	Capacités et commentaires
<p>Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.</p> <p>Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.</p> <p>Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$.</p> <p>Cosinus et sinus des angles usuels. Formule d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.</p> <p>Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\sin(x) \leq x$.</p> <p>Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.</p> <p>Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.</p> <p>Transformation de $a \cos(t) + b \sin(t)$ en $A \cos(t - \varphi)$.</p>	<p>Notation $a \equiv b [2\pi]$.</p> <p>Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.</p> <p>On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a) \cos(b)$, $\cos(a) \sin(b)$, $\sin(a) \sin(b)$.</p> <p>Interprétation sur le cercle trigonométrique.</p>