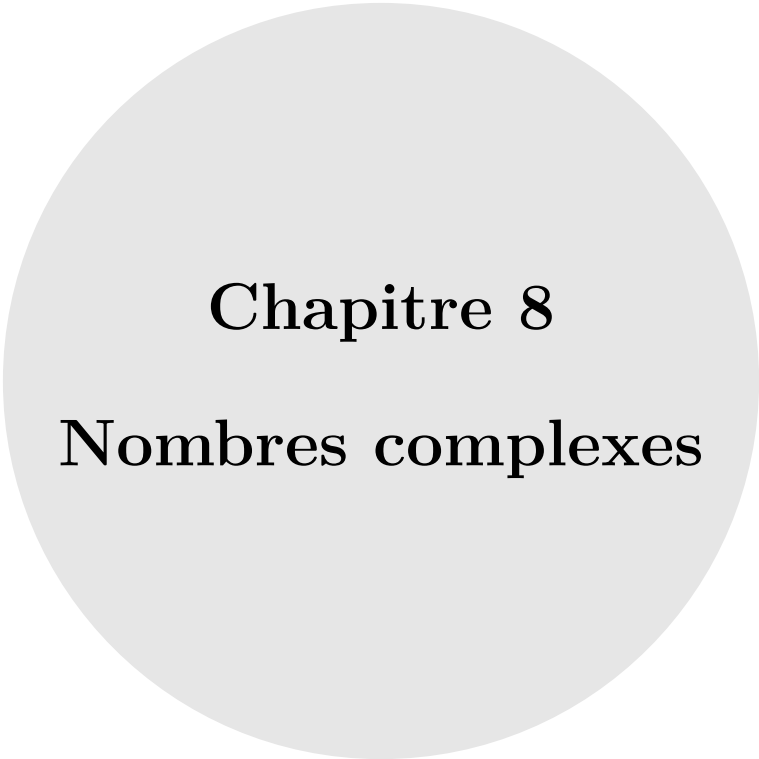




Chapitre 8

Nombres complexes

Mathématiques avec M. Cacitti

PCSI du lycée Paul Eluard de Saint-Denis

Année scolaire 2026-2027

1 Forme algébrique d'un complexe

Proposition 1 : Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ dont les éléments sont appelés **nombres complexes** et qui vérifie les propriétés suivantes.

- Il contient $\mathbb{R}$ et un élément i qui vérifie

$$i^2 = -1.$$

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$z = a + ib.$$

Les réels a et b sont appelés la partie réelle $\operatorname{Re}(z)$ et la partie imaginaire $\operatorname{Im}(z)$ de z . Cette écriture s'appelle la **forme algébrique** de z .

- Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, nous pouvons additionner et multiplier les complexes $a + ib$ et $c + id$ de la façon suivante :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \quad ; \quad (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Démonstration admise.

Remarques.

- L'addition et la multiplication des nombres complexes vérifient les mêmes règles de calcul que pour les nombres réels : commutativité, associativité, distributivité de la multiplication sur l'addition, intégrité (produit nul si et seulement si un des termes est nul).
- En particulier, nous avons également les formules de la somme géométrique, de la factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$ et du binôme de Newton.

Proposition 2 : Caractérisation des réels et des imaginaires purs

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = z$$

De plus on note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des complexes de partie réelle nulle, autrement dit, les **imaginaires purs** :

$$i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi

$$z \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff i\operatorname{Im}(z) = z.$$

Démonstration. On procède de manière cyclique en montrant $A \implies B \implies C \implies A$.

Proposition 3 : Propriétés des parties réelle et imaginaire

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- | | |
|--|--|
| • $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ | • $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$ |
| • $\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z)$ | • $\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(z')$ |
| • $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$ | • Si $z = a + ib \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$ |
| • $\operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z)$ | |

Démonstration. On écrit z et z' sous forme algébrique.

Remarque. Autrement dit, pour déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'une fraction on multiplie par le **conjugué** $a - ib$ du dénominateur $a + ib$.

Exemples.

- $(5i + 1)(6 - 2i) = 5i \times 6 + 5i \times (-2i) + 1 \times 6 + 1 \times (-2i) = 30i + 10 + 6 - 2i = 16 + 28i$.
Donc $\operatorname{Re}((5i + 1)(6 - 2i)) = 16 \neq 1 \times 6$ et $\operatorname{Im}((5i + 1)(6 - 2i)) = 28 \neq 5 \times (-2)$.
- $\frac{5i + 1}{6 - 2i} = \frac{(5i + 1)(6 + 2i)}{(6 - 2i)(6 + 2i)} = \frac{-4 + 32i}{6^2 + 2^2} = -\frac{1}{10} + i\frac{4}{5}$.

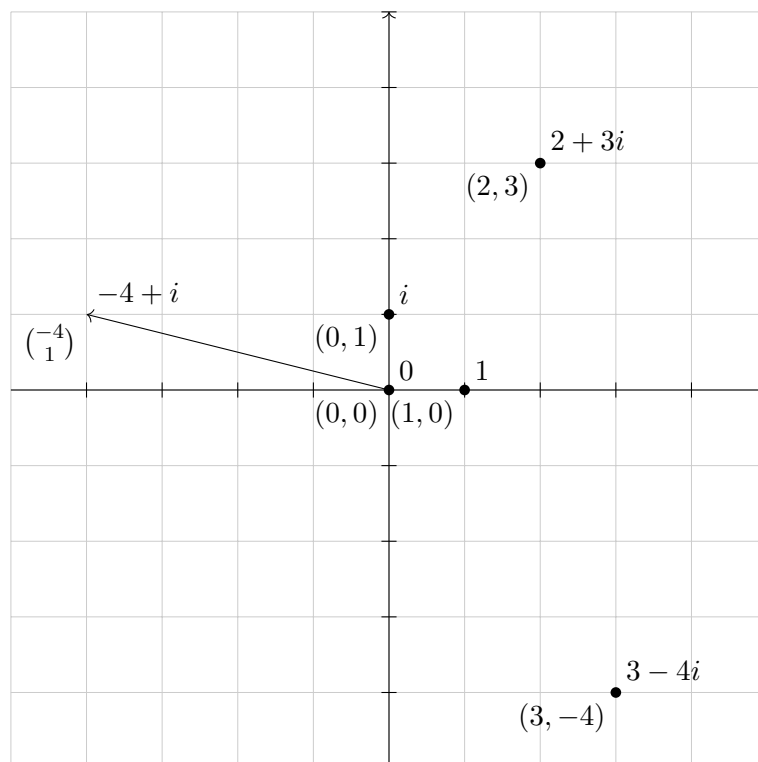
Exercice 1. Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique et en déduire leurs parties réelles et imaginaires.

1. $i(-1 + 2i)$
2. $(2 + i)(1 + 3i)$
3. $(i + 1)^2$
4. $\frac{1}{1 + i}$
5. $\frac{5 - i}{3 + 2i}$

2 Interprétation géométrique

Puisque tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on peut identifier $\mathbb{C}$ au plan muni d'un repère orthonormé.

- Au nombre z on associe le point de coordonnées (a, b) .
- Réciproquement, chaque point du plan est associé à un unique complexe qu'on appelle **affixe** de ce point.
- De même, on définit l'affixe du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ comme le nombre complexe $a + ib$.



Remarque.

- Les nombres réels correspondent aux points de l'axe des abscisses.
- Les nombres imaginaires purs correspondent aux points de l'axe des ordonnées.

Exemples.

- Le point $(3, -4)$ est associé au nombre complexe $3 - 4i$. Autrement dit, ce point est d'affixe $3 - 4i$.
- Le point associé au complexe $2 + 5i$ est $(2, 5)$.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est d'affixe $-1 + i$.

Proposition 4 : Propriétés des affixes

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives z_1 et z_2 et A, B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B .

- $z_1 + z_2$ est l'affixe du vecteur $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
- $z_A + z_B$ est l'affixe de l'unique point C tel que $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$.
- L'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $z_B - z_A$.
- L'affixe du milieu du segment $[AB]$ est $\frac{z_A + z_B}{2}$.

Démonstration. On réfléchit en termes de coordonnées pour les vecteurs et les points du plan et en termes de parties réelle et imaginaire pour les complexes.

Exemple. On considère un triangle ABC de sommets $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ et $C(5, 6)$.

Alors les affixes associés sont $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 3 + 4i$ et $z_C = 5 + 6i$.

Donc le milieu du segment $[AB]$ est d'affixe $\frac{z_A + z_B}{2} = 2 + 3i$.

Ainsi le milieu du segment $[AB]$ est le point de coordonnées $(2, 3)$.

De même l'affixe des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{CB}$ sont respectivement $z_C - z_A = 4 + 4i$ et $z_B - z_C = -2 - 2i$.

Ainsi l'affixe du vecteur $\vec{AC} + \vec{CB}$ est $4 + 4i + (-2 - 2i) = 2 + 2i$.

Or l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est également $z_B - z_A = 2 + 2i$.

Donc on retrouve la relation de Chasles : $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$ grâce à la relation $z_B - z_A = z_B - z_C + z_C - z_A$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1 A_2 \cdots A_n$ un polygone à n côtés du plan. On appelle isobarycentre de ce polygone, l'unique point G tel que $\sum_{k=1}^n \vec{GA_k} = \vec{0}$.

1. Déterminer l'affixe z_G de l'isobarycentre.
2. En déduire les coordonnées de l'isobarycentre.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un quadrilatère. A partir de la caractérisation :

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les diagonales se coupent en leurs milieux,

redémontrer la caractérisation suivante :

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$.

3 Conjugué

Définition 1 : Conjugué

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le **conjugué** du complexe z est le complexe $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$.

Exemples.

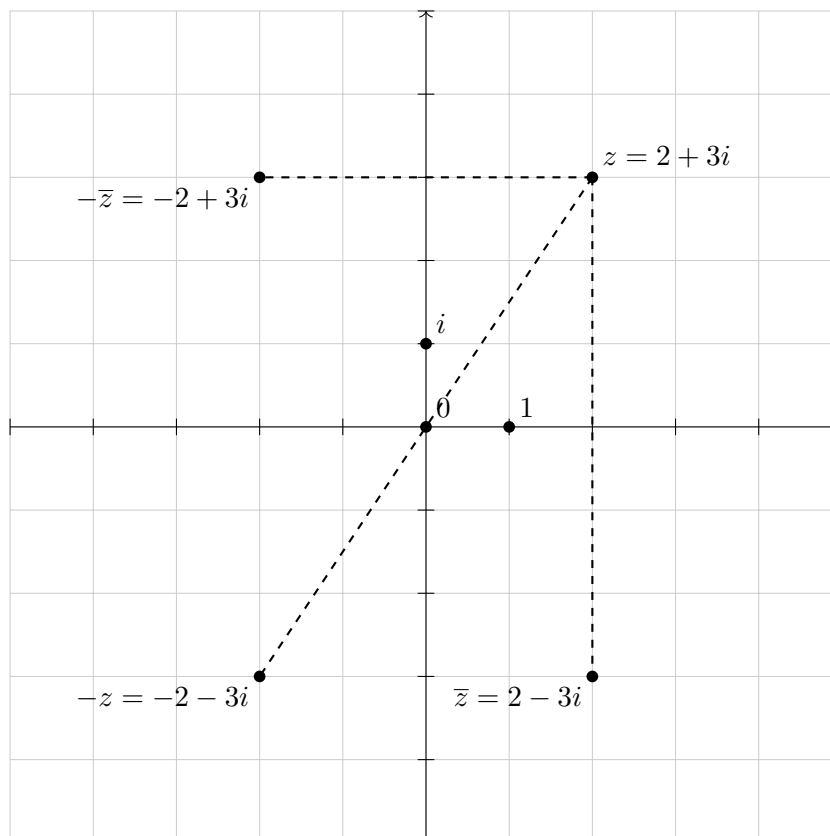
1. $\bar{1} = 1$
2. $\forall a \in \mathbb{R}, \bar{a} = a$
3. $\bar{i} = -i$
4. $\forall b \in \mathbb{R}, \bar{ib} = -ib$
5. $\overline{\left(\frac{1}{4-2i}\right)} = \frac{2-i}{10}$

Proposition 5 : Symétries dans le plan

Soit M un point du plan d'affixe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- Le symétrique de M par rapport à l'origine a pour affixe $-z = -a - ib$.
- Le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses a pour affixe $\bar{z} = a - ib$.
- Le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées a pour affixe $-\bar{z} = -a + ib$.

Démonstration. On raisonne avec les coordonnées (a, b) du point M et les différentes symétries.



Exercice 4. On considère les points $A(1, 2)$ et $B(-3, -4)$.

1. Préciser les affixes z_A et z_B des points A et B .
2. Déterminer l'axe $z_{B'}$ du symétrique B' par rapport au point A .
3. En déduire les coordonnées du point B' .

Proposition 6 : Propriétés du conjugué

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\bar{z} = a - ib$.
- $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$.
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.
- Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$
- Si $z \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.
- Si $z' \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.
- Si $z \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{\bar{z}^n}$.

Démonstration. On vérifie les points un par un grâce aux formes algébriques.

Exercice 5.

1. Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tels que $\frac{5z - 2}{z - 1}$ soit un réel.
2. Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tels que $\frac{5z - 2}{z - 1}$ soit un imaginaire pur.

4 Module

Définition 2 : S

it $z \in \mathbb{C}$. Le **module** du complexe z est le réel positif $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$.

Remarques.

- Autrement dit, si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x \in \mathbb{C}$ et son module est $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$ sa valeur absolue. Autrement dit, le module coïncide avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$. La notation est cohérente.

Exemples.

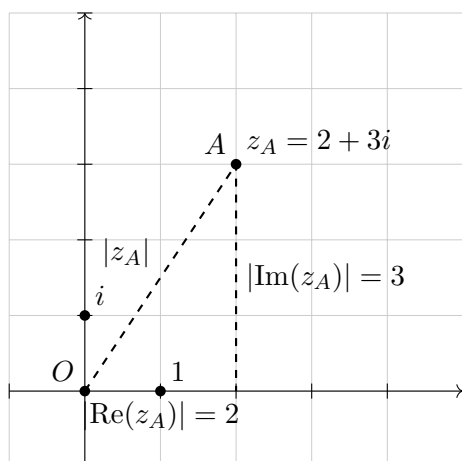
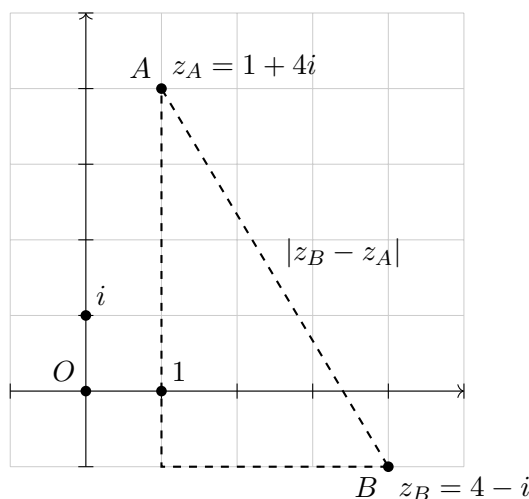
- $|-8| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$
- $|9i| = \sqrt{0^2 + 9^2} = 9$
- $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- $|5 - 2i| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

Proposition 7 : Module dans le plan

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B .

- La distance entre l'origine O et le point A est $OA = |z_A|$.
- La distance entre les points A et B est $AB = |z_B - z_A|$.

Démonstration. On utilise la formule de la distance dans un repère orthonormé.



Exemples.

- La distance entre l'origine O et le point $A(6, 8)$ est $|z_A| = |6 + i8| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
- La distance entre les points $A(-3, -1)$ et $B(9, -8)$ est :
 $|z_B - z_A| = |9 - 8i - (-3 - i)| = |12 - 7i| = \sqrt{12^2 + (-7)^2} = \sqrt{193}$.

Proposition 8 : Propriétés du module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|-z| = |z| = |\bar{z}|$
- $|zz'| = |z||z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $z\bar{z} = |z|^2$
- Si $z \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
- Si $z' \neq 0$ alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- Si $z \neq 0$ alors $\left|\left(\frac{1}{z}\right)^n\right| = \frac{1}{|z|^n}$.

Démonstration. On commence par montrer $z\bar{z} = |z|^2$ pour en déduire les autres propriétés en raisonnant avec les modules au carré.

Exercice 6. Soient $z = 4 + 2i$ et $w = 3 - 5i$. Calculer les modules des complexes suivants : $z, w, zw, \frac{z}{w}, \bar{z}, \bar{w}$ et z^3 .

Proposition 9 : Liens entre module et parties réelle et imaginaire

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- $\operatorname{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$
- $\operatorname{Im}(z) = |z| \iff z \in i\mathbb{R}_+$.

Démonstration. On réfléchit avec la forme algébrique de z .

Remarque. Géométriquement :

- le premier point s'interprète par un triangle rectangle où les côtés adjacents à l'angle droit ont des longueurs inférieures à la longueur de l'hypoténuse ;
- le second point par un des côtés adjacents à l'angle droit est de même longueur que l'hypoténuse si et seulement si le triangle est dégénéré.

Exercice 7. On considère l'ensemble $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = \sqrt{2}|z|\}$.

1. Montrer que $G = \{t(1+i) \mid t \geq 0\}$.
2. Géométriquement, à quoi correspond l'ensemble G ?

Proposition 10 : Inégalité triangulaire

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

De plus, nous avons les équivalences suivantes concernant le cas d'égalité :

$$\begin{aligned} |z + z'| = |z| + |z'| &\iff [z' = 0] \vee [\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z = \lambda z'] \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z \vee z = \lambda z'. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour l'inégalité, on utilise $|z + z'|^2 = (z + z')\overline{z + z'} = z\bar{z} + z'\bar{z} + \overline{z}z' + \overline{z}z' = 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + \operatorname{Re}(z\bar{z}) + \operatorname{Re}(z'\bar{z}') = 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z|^2 + |z'|^2$ et $\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'| = |z||z'|$. Pour le cas d'égalité, on utilise $\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |z||z'| \iff z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+$.

Remarque. En remplaçant z' par $-z'$ on obtient $|z - z'| \leq |z| + |z'|$. Donc, en notant M et M' les points d'affixes z et z' , l'inégalité devient $MM' \leq OM + OM'$: dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés, d'où le nom d'inégalité triangulaire.

Corollaire 1 : Seconde inégalité triangulaire ou inégalité triangulaire gauche

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

$$||z| - |z'||| \leq |z - z'|.$$

Démonstration. On utilise deux fois l'inégalité triangulaire avec $|z| = |z - z' + z'|$ et $|z'| = |z' - z + z|$.

Exercice 8. Soient $z, w \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$.
2. Si $|z| = 3$ et $|w| = 5$ alors déterminer les valeurs minimale et maximale possibles de $|z + w|$.

5 Cercle unité

Définition 3 : Cercle unité

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. On l'appelle le **cercle unité** :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Remarques.

- Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ correspond au cercle de centre O et de rayon 1, c'est-à-dire au **cercle trigonométrique**.
- Plus généralement, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$:
 - ★ l'ensemble des solutions de l'équation $|z - z_0| = r$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, correspond au cercle de centre d'affixe z_0 et de rayon r , que l'on note $C(z_0, r)$;
 - ★ l'ensemble des solutions de l'équation $|z - z_0| < r$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, correspond au disque (sans la frontière) de centre d'affixe z_0 et de rayon r , que l'on note $D(z_0, r)$;
 - ★ l'ensemble des solutions de l'équation $|z - z_0| \leq r$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, correspond au disque (avec la frontière) de centre d'affixe z_0 et de rayon r , que l'on note $\overline{D}(z_0, r)$.

Exemples.

- $1, -1, i, -i \in \mathbb{U}$ car ils sont de module 1.
- $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{U}$ car $\left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Proposition 11 : Caractérisation du cercle unité par l'inverse

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z \in \mathbb{U} \iff \frac{1}{z} = \bar{z}$.

Démonstration. On utilise $z\bar{z} = |z|^2$.

Théorème 1 : Caractérisation du cercle unité par la forme algébrique

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Démonstration. On utilise le cercle trigonométrique et le point M d'affixe z .

Remarque. Le réel θ n'est pas unique. En effet, grâce à la 2π -périodicité des cosinus et sinus, pour tout $\theta' \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta) = \cos(\theta') + i \sin(\theta') \iff \theta \equiv \theta' [2\pi].$$

Définition 4 : Formes trigonométrique et exponentielle d'un complexe de module 1

Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique** de z et on note également sa **forme exponentielle**

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = z.$$

Exemples.

- $1 = \cos(0) + i \sin(0) = e^{i0}$
- $-1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = e^{i\pi}$
- $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
- $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Proposition 12 : Propriétés de la forme exponentielle

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet e^{i\theta} &\neq 0 & \bullet \frac{1}{e^{i\theta}} &= \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} & \bullet e^{i(\theta+\theta')} &= e^{i\theta} e^{i\theta'} & \bullet e^{i(\theta-\theta')} &= \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise les propriétés du conjugué et les formules d'addition de cosinus et de sinus.

Proposition 13 : Formule de Moivre

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ pour montrer la propriété « $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ », puis on raisonne par passage à l'inverse pour $n \in \mathbb{Z}_-$.

Exemple. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\cos(2\theta) + i \sin(2\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2$
 $= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2i \cos(\theta) \sin(\theta).$

Donc, par unicité des parties réelle et imaginaire, on retrouve les formules de duplication :

- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$;
- $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta) \sin(\theta).$

Exercice 9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Moivre, Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Corollaire 2 : Calcul de cosinus et de sinus d'un multiple

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- $\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}(\theta) \sin^{2k}(\theta)$
- $\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \cos^{n-2k-1}(\theta) \sin^{2k+1}(\theta)$

Démonstration. On utilise la formule de Moivre, du binôme de Newton et les parties réelle et imaginaire.

Remarque. Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin^{2k}(\theta) = (1 - \cos^2(\theta))^k$, nous pouvons exprimer $\cos(n\theta)$ seulement à partir de $\cos(\theta)$: $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$ avec T_n un polynôme appelé polynôme de Tchebychev.

Exercice 10. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Proposition 14 : Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstration. On utilise les propriétés des parties réelle et imaginaire.

Exemple. Soient $n \in \mathbb{N}$. Alors nous pouvons calculer la somme $S_1 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ grâce à la formule d'Euler du cosinus.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } S_1 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{e^{i\frac{k\pi}{3}} + e^{-i\frac{k\pi}{3}}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)} + \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)} \\ &= \frac{2^{n+1} - e^{i\frac{\pi(n+1)}{3}}}{2^{n+2} - 2^{n+1}e^{i\frac{\pi}{3}}} + \frac{2^{n+1} - e^{-i\frac{\pi(n+1)}{3}}}{2^{n+2} - 2^{n+1}e^{-i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Puis nous pourrions encore continuer le calcul.

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme $S_2 = \sum_{k=0}^n \cos^k(\theta) \sin(k\theta)$.

Corollaire 3 : Factorisation par l'angle moitié

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad e^{i\theta} + e^{i\theta'} &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \\ \bullet \quad e^{i\theta} - e^{i\theta'} &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right) = 2ie^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise les formules d'Euler.

Remarque. En prenant la partie réelle ou la partie imaginaire, on retrouve les formules de Simpson.

Exemple. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $1 - e^{i\theta} = -2ie^{i\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{En effet } 1 - e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}} \times \left(-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Exercice 12. Grâce à la factorisation par l'angle moitié, retrouver les formules de Simpson.

Corollaire 4 : Somme de cosinus et de sinus

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$.

$$\bullet \quad \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \bullet \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Démonstration. On se sert des formules d'Euler, des sommes géométriques et de la factorisation par l'angle moitié.

Exercice 13. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer la somme suivante : $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x + ky)$.

6 Formes trigonométrique et exponentielle

Proposition 15 : Forme exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = re^{i\theta}.$$

Une telle écriture est appelée **forme exponentielle** de z .

Démonstration. Comme $z \neq 0$, $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

Remarques.

- Le réel r est unique : $r = |z|$.
- Le réel θ n'est pas unique : pour tout $\theta' \in \mathbb{R}$, $re^{i\theta} = re^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$.
On dit que θ est un **argument** de z .
- Soit M un point d'affixe z . Le point M a pour coordonnées polaires (r, θ) dans le repère orthonormé direct.
- Il est facile de passer de la forme exponentielle à la forme algébrique mais l'autre sens est plus délicat.

Proposition 16 : Passage d'une forme à l'autre

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- Si $z = re^{i\theta}$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, alors $z = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta)$.
- Si $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = re^{i\theta}$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Démonstration. On utilise la définition de la forme exponentielle et que $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in \mathbb{U}$.

Exemples.

- $3e^{i\frac{\pi}{6}} = 3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i \frac{3}{2}$
- $|1 + i| = \sqrt{2}$
Donc $1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Donc un argument de $1 + i$ est $\frac{\pi}{4}$.
- $|3 + 4i| = 5$
Donc $3 + 4i = 5 \left(\frac{3}{5} + i \frac{4}{5} \right) = 5e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ dont on ne connaît pas la valeur car il ne s'agit pas de cosinus et de sinus remarquables.

Exercice 14. Ecrire les complexes suivants dans l'autre forme.

1. $z_1 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$
2. $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$
3. $z_3 = 7e^{i\frac{13}{2}}$
4. $z_4 = -3$
5. $z_5 = 6e^{-i\frac{\pi}{4}}$
6. $z_6 = 9i$

Proposition 17 : Forme exponentielle principale

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tel que $z = re^{i\theta}$.
L'argument θ est appelé **argument principal** de z et est noté $\arg(z)$.

Démonstration. Deux arguments sont égaux modulo 2π donc il existe un unique dans $]-\pi, \pi]$.

Proposition 18 : Propriétés de l'argument principal

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.

- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$
- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) [2\pi]$
- $z = z' \iff [|z| = |z'| \wedge \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi]]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

Démonstration. On utilise les propriétés de la forme exponentielle.

Exercice 15. Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ et $\arg(z') = -\frac{\pi}{4}$. On considère $w = \frac{z^3 \bar{z'}}{z'}$.

1. Déterminer $\arg(w)$ modulo 2π .
2. Déterminer $\arg(\bar{w})$ modulo 2π .
3. On suppose de plus que $|z| = 2$ et $|z'| = 1$. Déterminer w sous forme exponentielle.

7 Equations algébriques

Définition 5 : Equation algébrique

Une **équation algébrique** est de la forme

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On dit également qu'il s'agit d'une **équation polynomiale**.

Si de plus $a_n \neq 0$ alors on dit que l'équation est de **degré** n .

Exemple. Les équations de degré 1 sont de la forme $az + b = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

L'unique solution est alors $z = -\frac{b}{a}$.

Proposition 19 : Factorisation d'une équation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si z_0 est une solution de l'équation $a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ alors il existe un unique uplet $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = (z - z_0)(b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0).$$

Autrement dit, il est possible de factoriser l'expression par $z - z_0$.

Démonstration. On raisonne par analyse-synthèse. L'analyse nous donne l'unicité et la synthèse l'existence.

Exemple. L'équation $z^3 - 2z^2 + 3z - 2 = 0$ admet comme solution évidente $z_0 = 1$.

Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut factoriser par $z - 1$:

$$z^3 - 2z^2 + 3z - 2 = 0 \iff (z - 1)(z^2 - z + 2) = 0.$$

Exercice 16. Résoudre l'équation $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$ en déterminant une solution évidente z_0 puis en factorisant par $z - z_0$.

Corollaire 5 : Nombre de solutions

Une équation algébrique de degré n possède au maximum n solutions complexes distinctes.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que l'équation admet strictement plus que n solutions complexes distinctes.

Remarque. Le nombre de solutions peut être égal ou strictement inférieur au degré.

Exemples.

- L'équation $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0$ admet une unique solution $z_0 = 1$ car, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z - 1)^3$. Pourtant il s'agit d'une équation de degré 3.
- L'équation précédente $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$ admet trois solutions distinctes et il s'agit d'une équation de degré 3.

Définition 6 : Racine carrée

Soit $a \in \mathbb{C}$. Une **racine carrée** du complexe a est un complexe z solution de l'équation $z^2 = a$.

Remarques.

- Si $a = 0$ alors l'unique racine carrée de a est 0.
- Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors a admet exactement deux racines carrées $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a \in \mathbb{R}_-^*$ alors a admet exactement deux racines carrées $i\sqrt{|a|} = i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{|a|} = -i\sqrt{-a}$.
- Il ne faut pas confondre « une racine carrée » pour un complexe et « la racine carrée » pour un réel positif. La notation $\sqrt{\cdot}$ est réservée aux réels positifs.

Exemples.

- $i^2 = -1$ et $(-i)^2 = -1$ donc deux racines carrées de -1 sont i et $-i$.
- $(e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $(-e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ donc deux racines carrées de i sont $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Proposition 20 : Existence des racines carrées

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées. Celles-ci sont opposées.

Démonstration. On réfléchit avec la forme exponentielle pour l'existence. Le nombre de solutions est dû au degré de l'équation.

Remarque. Pour déterminer les racines carrées de $z \in \mathbb{C}^*$, il existe deux méthodes.

- Si on détermine l'écriture exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors les racines carrées de z sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}+\pi}$.
- Sinon on utilise l'écriture algébrique $a = \alpha + i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Un complexe $z = x + iy$ est racine carrée de a si et seulement si

$$\alpha + i\beta = a = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

si et seulement si, en utilisant également le module,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= \alpha \\ 2xy &= \beta \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \end{cases}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre un système où lignes 1 et 3 nous permettent d'obtenir les valeurs possibles pour x et la ligne 2 d'en déduire les valeurs possibles pour y .

Exemples.

- Soit $a_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$. Alors les racines carrées de a_1 sont $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
- Soit $a_2 = 2 + 3i$. Alors $|a_2|^2 = 13$.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors } z^2 = a_2 \iff x^2 - y^2 + 2ixy = 2 + 3i$$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= 2 \\ 2xy &= 3 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{13} \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow \frac{L_1 + L_3}{2}}{\iff} \begin{cases} x^2 &= \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \\ 2xy &= 3 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{13} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}} \\ 2xy &= 3 \\ x^2 + y^2 &= 13 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit que les racines sont } z_1 = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}} + i \frac{3}{2\sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}}} \text{ et } z_2 = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}} - i \frac{3}{2\sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}}}.$$

Exercice 17. Déterminer les racines carrées des complexes suivants.

1. $a_1 = 3 + 4i$

2. $a_2 = 8 - 6i$

Théorème 2 : Equation de degré 2

On considère $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, l'équation de degré 2 : $az^2 + bz + c = 0$ et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution

$$z_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta \neq 0$ alors Δ admet exactement deux racines carrées δ et $-\delta$ et l'équation admet exactement deux solutions

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. On passe par la forme canonique en complétant l'identité remarquable $az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c = a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$. Puis on utilise la troisième identité remarquable en utilisant le discriminant Δ et sa racine carrée δ .

Corollaire 6 : Equation de degré 2 réelle

On considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, l'équation de degré 2 : $ax^2 + bx + c = 0$ et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation possède une unique solution réelle

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet exactement deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet exactement deux solutions complexes non réelles conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration. On adapte la démonstration précédente avec les différents cas pour $\Delta \in \mathbb{R}$.

Exemples.

- L'équation $z^2 - (2+i)z + (1+i) = 0$ est du second degré complexe avec comme discriminant $\Delta = (-(2+i))^2 - 4(1+i) = 3 + 4i - 4 - 4i = -1$ donc de racines carrées i et $-i$.

Ainsi les solutions de l'équation sont $z_1 = \frac{-(-(2+i)) + i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \frac{-(-(2+i)) - i}{2} = 1$.

- L'équation $(1+i)z^2 - 2(1+i)z + 1+i = 0$ est du second degré complexe avec comme discriminant $\Delta = (-2(1+i))^2 - 4(1+i)(1+i) = 0$.

Ainsi l'équation admet une unique solution $z_0 = -\frac{-2(1+i)}{2(1+i)} = 1$.

Exercice 18.

1. Calculer les racines carrées de $1 + 2\sqrt{2}i$ sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + iz - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Proposition 21 : Relations coefficients-racines

Soient $z_1, z_2, a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

Les complexes z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

Démonstration. On raisonne par double implication.

Remarque. En particulier lorsque $a = 1$, z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $z^2 + bz + c = 0$ si et seulement si $z_1 + z_2 = -b$ et $z_1 \times z_2 = c$.

Exemple. Soient $z_1 = 2i$ et $z_2 = 3 - i$. Alors $z_1 + z_2 = 3 + i$ et $z_1 \times z_2 = 2 + 6i$.
Donc z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - (3 + i)z + 2 + 6i$.

Exercice 19. On considère l'équation $2z^2 + (i - 4)z + 3 + 4i = 0$.

1. Montrer que $z_1 = i$ est une solution de l'équation.
2. En déduire l'autre solution z_2 grâce aux relations coefficients-racines.

8 Racines n -ièmes

Définition 7 : Racines n -ièmes de l'unité

oit $n \in \mathbb{N}^*$. Les **racines n -ièmes** de l'unité solutions de l'équation $z^n = 1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Remarques.

- $1 \in \mathbb{U}_n$ et $-1 \in \mathbb{U}_n$ si et seulement si n est pair.
- $\forall \omega \in \mathbb{U}_n, |\omega| = 1$ et $\omega^{-1} = \bar{\omega}$.

Exemples.

- Pour $n = 1$, nous avons $\mathbb{U}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^1 = 1\} = \{1\}$.
- Pour $n = 2$, nous avons $\mathbb{U}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 1\} = \{1, -1\}$.

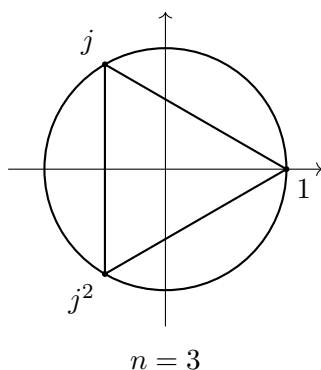
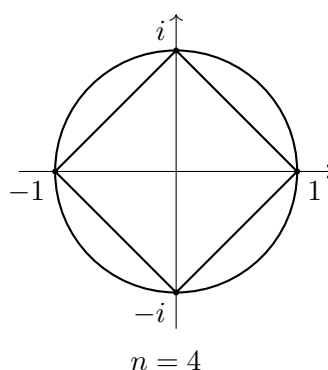
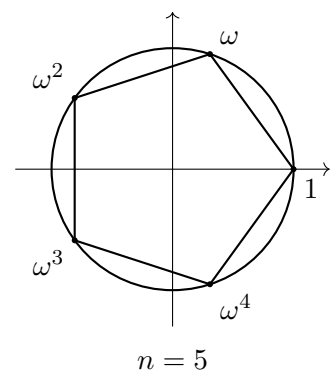
Proposition 22 : Expression des racines n -ième de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}$.

Démonstration. On procède par double inclusion et avec la forme exponentielle.

Remarques.

- En particulier il y a exactement n racines n -ièmes de l'unité.
- Si on note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ alors $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$ et ces complexes représentent les points du plan formant le polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.



Exercice 20. Déterminer les racines 6-ièmes de l'unité et tracer les points du plan dont ils sont les affixes.

Définition 8 : Racines n -ièmes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Les **racines n -ièmes** du complexe a sont les solutions de l'équation $z^n = a$.

Proposition 23 : Expression des racines n -ième

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$ d'écriture exponentielle $a = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- $z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine n -ième du complexe a .
- L'ensemble des racines n -ièmes du complexe a est

$$\left\{ z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

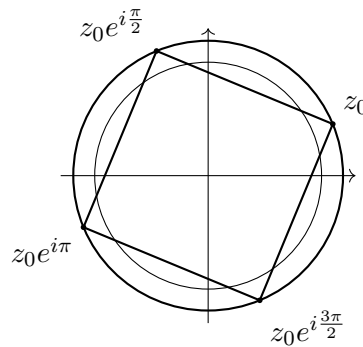
Démonstration. On construit z_0 en raisonnant avec la forme exponentielle. Puis, pour tout $z \in \mathbb{C}$, z est racine n -ième de a si et seulement si $\frac{z}{z_0}$ est racine n -ième de l'unité.

Remarque. Géométriquement ces complexes représentent les points du plan formant le polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre l'origine et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Exemple. Soient $n = 4$ et $a = 2i$. Ainsi $a = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Donc une racine 4-ième de a est $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Donc l'ensemble des racines 4-ième de a est $\left\{ \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right)}, \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)}, \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right)} \right\}$.



Exercice 21. Déterminer les racines 5-ièmes de $a = 1 + i$.

9 Exponentielle complexe

Définition 9 : Exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. L'**exponentielle** du complexe z est le complexe $\exp(z) = e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$.

Remarques.

- Autrement dit, si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $e^z = e^x e^{iy}$.
- En particulier $|e^z| = e^x$ et un argument de e^z est y .
- Si $z = x \in \mathbb{R}$ alors $e^z = e^x$. Donc l'exponentielle complexe coïncide avec l'exponentielle sur les réels. La notation est cohérente.

Proposition 24 : Propriétés de l'exponentielle complexe

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

- $e^z \neq 0$
- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
- $e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$
- $e^z = e^{z'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$

Démonstration. On utilise les propriétés de l'exponentielle réelle et de la forme exponentielle précédente.

Remarque. La dernière propriété nous permet de résoudre des équations de la forme $e^z = a$ de paramètre $a \in \mathbb{C}^*$ et d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Il faut d'abord écrire a sous forme exponentielle.

Exemple. On considère l'équation $e^z = 1 + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Nous avons $1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Donc, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, $e^z = 1 + i \iff e^x e^{iy} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$
 $\iff e^x = \sqrt{2}$ et $y \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
 $\iff x = \ln(\sqrt{2}) = \frac{\ln(2)}{2}$ et $y \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\ln(2)}{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercice 22. Résoudre l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

10 Applications en géométrie

Proposition 25 : Angle entre deux vecteurs

Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathbb{R}^2$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D .

- $\arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.
- $\arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Démonstration. Une mesure de l'angle orienté $(\vec{0}, \overrightarrow{OA})$ est un argument du complexe z_A .

Donc une mesure de l'angle orienté $(\vec{0}, \overrightarrow{AB})$ est un argument du complexe $z_B - z_A$.

Donc une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{0}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{0}, \overrightarrow{AB})$ est $\arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$.

Exemple. Soient $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ et $C(3, 3)$ trois points du plan. Les affixes associés sont $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + i$ et $z_C = 3 + 3i$.

Donc $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\frac{\pi}{4}$.

Corollaire 7 : Parallélisme, alignement et perpendicularité

Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathbb{R}^2$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

Démonstration. On applique la proposition précédente et les propriétés des complexes.

Exercice 23. On considère les points $A(0, 0)$, $B(2, 1)$, $C(1, 3)$ et $D(-1, 2)$ d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D .

1. Calculer $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ et $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$.
2. Que peut-on en conclure sur le quadrilatère $ABCD$? Comment en conclure davantage?

Proposition 26 : Correspondances géométriques

Soient B un point du plan $\mathbb{R}^2$ d'affixe $b \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

- La transformation $z \mapsto z + b$ correspond à la **translation** de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
- La transformation $z \mapsto \lambda z$ correspond à l'**homothétie** de centre O et de rapport λ .
- La transformation $z \mapsto e^{i\theta} z$ correspond à la **rotation** de centre O et d'angle θ .
- La transformation $z \mapsto \bar{z}$ correspond à la **symétrie** par rapport à l'axe des abscisses.

Démonstration. On raisonne grâce à l'identification entre point et affixe.

Exemples.

- $z \mapsto z + 1$ et $z \mapsto z + i$ correspondent aux translations de vecteurs respectifs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $z \mapsto \frac{z}{2}$ et $z \mapsto 2z$ correspondent aux homothéties de centre O et de rapports respectifs $\frac{1}{2}$ et 2 .
- $z \mapsto iz = e^{i\frac{\pi}{2}} z$ correspond à la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 24. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par les écritures complexes suivantes.

1. $f : z \mapsto \frac{z}{i}$

2. $g : z \mapsto z + 2 + i$

Corollaire 8 : Correspondances géométriques avec un autre centre

Soient A un point du plan $\mathbb{R}^2$ d'affixe $a \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

- L'homothétie de centre A et de rapport λ correspond à la transformation $z \mapsto \lambda(z - a) + a$.
- La rotation de centre A et d'angle θ correspond à la transformation $z \mapsto e^{i\theta}(z - a) + a$.

Démonstration. Soient $M, M' \in \mathbb{R}^2$ d'affixes respectives z, z' .

- M' l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport λ si et seulement si $\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}$ si et seulement si $z' = \lambda(z - a) + a$.
- M' l'image de M par la rotation de centre A et d'angle θ si et seulement si $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \theta [2\pi]$ et $AM = AM'$ si et seulement si $z' = e^{i\theta}(z - a) + a$.

Remarque. En particulier le point A est le point fixe de ces transformations. Une fois déterminé, il suffit d'écrire la transformation f de la forme souhaitée avec λ ou $e^{i\theta}$.

Exemple. $f : z \mapsto iz + 3 - i$ définie sur $\mathbb{C}$ correspond à la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $2 + i$.

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z \iff iz + 3 - i = z \iff z = \frac{3-i}{1-i} = 2 + i$.

Ainsi, en notant $a = 2 + i$ le point fixe, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) - a = f(z) - f(a) = i(z - a) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a)$, autrement dit, $f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a) + a$.

Exercice 25. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par les écritures complexes suivantes.

1. $f : z \mapsto jz + 4 - 2i$

2. $g : z \mapsto 4z + 5i - 3$

11 Exercices

11.1 Forme algébrique

Exercice 26. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $z_1 = 2 + 5i + i + 3$

2. $z_2 = 4(-2 + 3i) + 3(-5 - 8i)$

3. $z_3 = (2 - i)(3 + 8i)$

4. $z_4 = i(1 - 3i)^2$

5. $z_5 = (1 + i)^2$

6. $z_6 = \frac{1}{1 + i}$

7. $z_7 = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$

8. $z_8 = \frac{1 - 2i}{3 + i}$

9. $z_9 = \frac{(3 + 5i)^2}{1 - 2i}$

10. $z_{10} = \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2 + \frac{3 + 6i}{3 - 4i}$

Exercice 27. Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = (3 + 2i)^2(2 - i)$

2. $z_2 = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{1 - i}$

Exercice 28. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Simplifier $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ et $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Exercice 29. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $z + \frac{1}{z} \in i\mathbb{R} \iff z \in i\mathbb{R}$.

11.2 Conjugué

Exercice 30. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Calculer les conjugués des nombres complexes suivants.

1. $z_1 = i(4 - 2i)^2$

2. $z_2 = \frac{i\sqrt{3}}{1 + 6i}$

3. $z_3 = \frac{z(1 - i\bar{z})}{2z - 4i\bar{z}}$

Exercice 31. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Calculer les parties réelle et imaginaire de $Z = \frac{2 + \bar{z}}{1 - \bar{z}}$.

Exercice 32. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} : 2z + 6\bar{z} = 3 + 2i$.

11.3 Module

Exercice 33. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{1 - z^n}{1 - z}\right| \leq \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$.

Exercice 34. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_k| \leq 1$ et $|b_k| \leq 1$.

Montrer que $\left|\prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|$.

Exercice 35. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $z + \bar{z} = |z|$.

Exercice 36. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq |z|^2 + |z - 1|$.

Exercice 37. Soient $n \geq 2$ entier et $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Montrer que $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée.

- Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_k = 0$.
- Il existe $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $z_{k_0} \neq 0$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_k = \lambda_k z_{k_0}$.

11.4 Cercle unité et trigonométrie

Exercice 38. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 39. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
2. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 40. Soient $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \not\equiv \pi[2\pi]$.

1. Montrer que $e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} \neq 0$.
2. Déterminer la partie réelle de $z = \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}}$.

Exercice 41. Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donner la forme algébrique de $\frac{1 + i \tan(\alpha)}{1 - i \tan(\alpha)}$.

Exercice 42. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

- | | |
|--|--|
| 1. $C_1 = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ | 4. $S_1 = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ |
| 2. $C_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ | 5. $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$ |
| 3. $C_3 = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \cos^k(\theta)$ | 6. $S_3 = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) \sin^k(\theta)$ |

11.5 Argument et forme exponentielle

Exercice 43. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

- | | | | |
|----------------------------|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| 1. $(\sqrt{3} + i)^{2013}$ | 2. $\left(\frac{9+i}{5-4i}\right)^4$ | 3. $(1 + e^{i\theta})^n$ | 4. $\frac{(1+i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$ |
|----------------------------|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|

Exercice 44. On considère $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Déterminer la forme exponentielle et la forme algébrique de z_3 .
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 45. Déterminer les formes exponentielles des nombres complexes suivants.

- | | |
|--|--|
| 1. $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ | 4. $z_4 = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}$ |
| 2. $z_2 = (-1+i)(-1+i\sqrt{3})$ | 5. $z_5 = \frac{2\sqrt{3}-6i}{-i}$ |
| 3. $z_3 = -2i(2+2i)$ | 6. $z_6 = \frac{1+i+\sqrt{2}}{1-i-\sqrt{2}}$ |

Exercice 46. Résoudre l'équation $\bar{z} = z^3$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 47. On considère $z = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z .
2. En déduire les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $z^n \in \mathbb{R}$.

Exercice 48. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $(1+i)^{4n}$.
2. En déduire les valeurs de $\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p}$ et $\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$.

11.6 Equations algébriques

Exercice 49.

1. Déterminer les racines carrées de $1 + i$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 50. Déterminer les racines carrées de $1 + 6i$.

Exercice 51. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 - 2(2 + i)z + 6 + 8i = 0$
2. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$

Exercice 52. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^4 + iz^2 - (1 - i) = 0$
2. $z^4 + (3 - 6i)z^2 - 2(4 + 3i) = 0$

Exercice 53. On considère l'équation $(E) : z^3 - 2z^2 + 2(2 - 3i)z - 20 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une racine $z_0 \in i\mathbb{R}$.
2. Calculer les deux autres racines z_1 et z_2 .

11.7 Racines n -ièmes

Exercice 54. Déterminer les racines sixièmes de $-\frac{4}{1 + i\sqrt{3}}$.

Exercice 55. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^6 + (2i - 1)z^3 - i - 1 = 0$
2. $4(z + i)^4 - (z + 1)^4 = 0$.

Exercice 56. Soient $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u + v$ et u^2 .
2. En déduire $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

Exercice 57. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 58.

1. Résoudre l'équation $(E) : \left(\frac{2z + 1}{z + 1}\right)^4 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que les images des solutions de l'équation (E) appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

11.8 Exponentielle complexe

Exercice 59. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

1. $e^z = i$
2. $e^z = 2$
3. $e^z = 2i$
4. $e^{2z} = 1 + i\sqrt{3}$

Exercice 60. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C} : e^{2z} + e^z + 1 = 0$.

Exercice 61. On définit, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

1. Résoudre l'équation $e^{iz} = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\cos(z) = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 62. On définit, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Résoudre l'équation $\sin(z) = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

11.9 Applications en géométrie

Exercice 63. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. $|z + i| = |z - 1|$;
2. $z, \frac{1}{z}$ et $1 + z$ aient le même module ;
3. $\frac{z + 1}{z - 1} \in \mathbb{R}$;
4. $z + \bar{z} = z\bar{z}$.

Exercice 64. Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. $1, z$ et z^2 forment un triangle rectangle ;
2. z, z^2 et z^4 soient alignés ;
3. $z, \frac{1}{z}$ et $-i$ soient alignés.

Exercice 65. Soient $z \in \mathbb{C}^*$, p et q ses deux racines carrées. Déterminer une condition nécessaire pour que les points M, P et Q d'affixes respectives z, p et q forment un triangle rectangle en M .

Exercice 66. Déterminer les transformations géométriques correspondantes aux fonctions complexes suivantes. Schématiser leurs actions sur un point.

1. $f : z \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}}z + 3 + 4i$
2. $f : z \mapsto 4 - 2z$
3. $f : z \mapsto 5 + z + 2i$
4. $f : z \mapsto \frac{z}{2} - i - \frac{i\sqrt{3}z}{2} + 1$

Exercice 67. Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes. Schématiser leurs actions sur un point.

1. L'homothétie f de centre A d'affixe $4i$ et de rapport $-\frac{1}{3}$.
2. La rotation g de centre B d'affixe -2 et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
3. La translation h de vecteur d'affixe $4 - 2i$.

Exercice 68. On considère la fonction complexe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = 4iz + 3 + 2i$. Déterminer à quelles composées de transformations géométriques du plan $\mathbb{R}^2$ correspond la fonction complexe f . Schématiser son action sur un point.

Programme officiel de ce chapitre

Contenus	Capacités et commentaires
<p>Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme de Newton. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur. Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module.</p> <p>Relation $z ^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme. Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.</p> <p>Formule de Moivre.</p> <p>Forme trigonométrique re^{it} ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$. Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.</p> <p>Sommes et produits des racines. Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique. Définition de e^z pour $z \in \mathbb{C}$: $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}e^{i\operatorname{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$. Interprétation géométrique, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z + b$. Interprétation géométrique de la conjugaison.</p>	<p>La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.</p> <p>On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »). Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $z - z'$, cercles et disques.</p> <p>Notation $\mathbb{U}$.</p> <p>Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calculs de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$. Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction $\cos(t)$ et $\sin(t)$.</p> <p>Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.</p> <p>Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.</p> <p>Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.</p> <p>Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.</p> <p>Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations. L'étude générale des similitudes est hors programme.</p>

Table des matières

1	Forme algébrique d'un complexe	2
2	Interprétation géométrique	3
3	Conjugué	4
4	Module	6
5	Cercle unité	7
6	Formes trigonométrique et exponentielle	10
7	Equations algébriques	12
8	Racines n -ièmes	15
9	Exponentielle complexe	16
10	Applications en géométrie	17
11	Exercices	19