

Exercice 1 - Ensembles

- Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 3\}$ et $B = \{(t - 1, 5 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrer, par double inclusion, que $A = B$.
- Soient $A = [4, 7]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\}$ et $C = \mathbb{N}$. Déterminer les ensembles suivants par équivalences successives.

- | | | | |
|----------------|----------------------------|-------------------------|---|
| (a) $A \cup B$ | (c) $[-2, 12] \setminus B$ | (e) $(A \cup B) \cap C$ | (g) $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$ |
| (b) $A \cap C$ | (d) $A \cap \overline{C}$ | (f) $A \cup (B \cap C)$ | |

- Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer, par opérations ensemblistes, l'égalité suivante :

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A).$$

Exercice 2 - Arithmétique

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$. Montrer de deux façons que $14 \mid u_n$.
 - Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
 - En utilisant la formule de factorisation de $a^{m+1} - b^{m+1}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$.
- Résoudre, par équivalences successives, l'équation, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$8xy + 9 = 10x + 12y.$$

- Déterminer, par analyse-synthèse, tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^2 + n \mid n^3 + 5$.
 Dans l'analyse, on pourra utiliser différentes divisibilités pour montrer que $n + 1 \mid 4$.

Exercice 3 - Nombres réels

- Résoudre l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(|x - 2| - 3)(4 - |5x - 1|) \geq 0.$$

- Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor 2x + 1 \rfloor + \lfloor x - 2 \rfloor = 4.$$

- On considère l'ensemble $A = \left\{ \frac{2n+1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.
 - Montrer que la partie A est bornée.
 - Déterminer $\inf(A)$ et $\sup(A)$.
 - Déterminer si la partie A admet un minimum et un maximum.
- Pour les plus curieux, démontrer la caractérisation des intervalles :
 Pour tout $I \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, les assertions suivantes sont équivalentes.
 - La partie I est un intervalle.
 - Pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$, nous avons $[x, y] \subset I$.

Exercice 4 - Trigonométrie

1. On cherche à calculer $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$.
 - (a) Grâce à $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
 - (b) Grâce aux cosinus et sinus de $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{8}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$.
2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
 - (b) $\cos\left(4x - \frac{5\pi}{4}\right) = \cos(x)$
 - (c) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$
 - (d) $\tan(2x) = \sqrt{3}$
3. Résoudre l'inéquation $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.