

# Présentation du cours de mathématiques

- Si la porte est **fermée** alors vous ne serez **pas acceptés** en cours.
- **Khôlle** de mathématiques toutes les deux semaines. Elles commencent la semaine du 14 septembre. Ce sera précisé sur le khôlloscope.
- Un khôlle de mathématiques s'organise de la manière suivante. Vous serez trois au tableau et vous devrez répondre à une question de définition et/ou une démonstration du cours suivies d'un ou deux exercices. Le tout à faire au tableau.
- **Devoir surveillé** de mathématiques un samedi matin sur trois environ. Le premier a lieu le samedi 19 septembre.
- Apporter le **chapitre en cours** avec un **cahier** de démonstrations et d'exercices et un **cahier de brouillon** (ou des feuilles de brouillon).
- Laisser les autres chapitres dans un classeur avec pochettes plastiques, un porte-vues ou une chemise à rabats élastiques.

# Chapitre 1 Rudiments de logique

## ① Propositions, équivalences et négations.

Les phrases mathématiques.

## ② Conjonctions et disjonctions.

« et » et « ou ».

## ③ Implications.

« si ... alors ... ».

## ④ Quantificateurs.

« pour tout » et « il existe ».

## ⑤ Différents modes de raisonnement.

Par l'absurde, par récurrence, ...

# 1.1 Propositions

**Assertion ou proposition.**

**Exemples.**

**Exercice 1.**

# 1.1 Equivalences

**Equivalence**  $P \iff Q$ .

| $P$ | $Q$ | $P \iff Q$ |
|-----|-----|------------|
| V   | V   | V          |
| V   | F   | F          |
| F   | V   | F          |
| F   | F   | V          |

Trois façons de le lire.

**Exemples.**

# 1.1 Equivalences

**Propriétés : réflexivité, symétrie et transitivité.**

*Démonstration de la proposition 1.*

La transitivité pour résoudre des équations.

**Exercice 2.**

# 1.1 Négations

**Négation d'une proposition.**

| $P$ | $\text{non}(P)$ |
|-----|-----------------|
| V   | F               |
| F   | V               |

**Exemples.**

**Exercice 3.**

**Négation de la négation.**

*Démonstration de la proposition 2.*

**Exercice 34.**

**Exercice 36.**

**Exercice 35.**

**Exercice 37.**

## 1.2 Conjunctions

**Conjunction.**

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|-----|-----|--------------|
| V   | V   | V            |
| V   | F   | F            |
| F   | V   | F            |
| F   | F   | F            |

**Exemples.**

**Exercice 4.**

## 1.2 Conjonctions

**Propriétés : commutativité et associativité.**

*Démonstration de la proposition 3.*

**Exemple.**

**Exercice 5.**

## 1.2 Disjonctions

### Disjonctions.

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|-----|-----|------------|
| V   | V   | V          |
| V   | F   | V          |
| F   | V   | V          |
| F   | F   | F          |

Différence entre le « ou » mathématiques et le « ou » littéraire.

### Exemple.

### Exercice 6.

## 1.2 Disjonctions

**Propriétés : commutativité et associativité.**

*Démonstration de la proposition 4.*

**Exemple.**

**Exercice 7.**

## 1.2 Conjonctions et disjonctions

### **Lois de Morgan.**

*Démonstration de la proposition 5.*

La négation échange les « ou » et les « et ».

**Exemples.**

**Exercice 8.**

## 1.2 Conjonctions et disjonctions

**Distributivité.**

*Démonstration de la proposition 6.*

**Exemple.**

**Exercice 9.**

**Exercice 39.**

**Exercice 40.**

## 1.3 Implications

### Implication.

Plusieurs façons de le lire.

Ne pas confondre  $P \implies Q$  et  $P$  est vraie donc  $Q$  est vraie.

### Exemples.

On peut montrer une implication par **raisonnement direct**.

### Exercice 10.

## 1.3 Implications

$$[P \implies Q] \iff [\text{non}(P) \vee Q]$$

*Démonstration de la proposition 7.*

**Exemple.**

**Exercice 11.**

## 1.3 Implications

### Négation d'une implication.

*Démonstration du corollaire 1.*

La négation d'une implication n'est pas une implication.  
On peut avoir  $P$  et non( $Q$ ).

**Exemple.**

**Exercice 12.**

## 1.3 Implications

**Réciproque d'une implication.**

**Exemple.**

$P \implies Q$  et  $Q \implies P$  sont totalement différents.

**Exemples.**

**Exercice 13.**

## 1.3 Implications

**Contraposée d'une implication.**

**Exemples.**

## 1.3 Implications

**Equivalence entre implication et contraposée.**

*Démonstration de la proposition 8.*

**Exemple.**

On peut montrer une implication par **contraposée**.

**Exemple.**

**Exercice 14.**

## 1.3 Implications

### **Double implication.**

*Démonstration de la proposition 9.*

On peut montrer une équivalence par double implication.

**Exemple.**

**Exercice 15.**

## 1.3 Implication

**Transitivité.**

*Démonstration de la proposition 10.*

**Exemple.**

**Exercice 16.**

**Exercice 42.**

**Exercice 43.**

## 1.4 Quantificateurs

Des assertions peuvent dépendre d'un paramètre.

**Quantificateur universel.**

**Exemples.**

**Exercice 17.**

## 1.4 Quantificateurs

### **Quantificateur existentiel**

La variable est muette. On peut la changer.

**Exemples.**

**Exercice 18.**

## 1.4 Quantificateurs

**Négation avec un quantificateur.**

*Démonstration de la proposition 11.*

La négation échange les «  $\forall$  » et les «  $\exists$  »

**Exemples.**

**Exercices 19 et 20.**

Pour montrer un «  $\forall x$  », on peut commencer par fixer un  $x$  quelconque.

**Exemple.**

**Exercice 21.**

## **Exercice 45**

## **Exercice 46**

## 1.5 Différents modes de raisonnement

**Raisonnement direct.**

**Exemple.**

**Exercice 22.**

## 1.5 Différents modes de raisonnement

**Raisonnement par contraposée.**

**Exemple.**

**Exercice 23.**

## 1.5 Différents modes de raisonnement

**Raisonnement par l'absurde.**

**Exemple.**

**Exercice 24.**

La négation d'une implication  $A \implies B$  est  $A \wedge \text{non}(B)$ .

**Exemple.**

**Exercice 25.**

**Exercice 49.**

**Exercice 52.**

**Exercice 55.**

## 1.5 Différents modes de raisonnement

### **Raisonnement par équivalences successives**

A éviter si les justifications sont trop longues.

**Exemple.**

**Exercice 26.**

## 1.5 Différents modes de raisonnement

**Raisonnement par double implication.**

**Exemple.**

**Exercice 27.**

**Exercice 59.**

**Exercice 62.**

## 1.5 Différents modes de raisonnement

**Raisonnement par analyse-synthèse.**

**Exemple.**

**Exercice 28.**

## 1.5 Différents modes de raisonnement

**Raisonnement par disjonction de cas.**

**Exemple.**

**Exercice 29.**

**Exercice 66.**

**Exercice 69.**

## 1.5 Différents modes de raisonnement

**Récurrence.**

**Exemple.**

**Exercice 30.**

## 1.5 Différents modes de raisonnement

**Récurrance double.**

**Exemple.**

**Exercice 31.**

## 1.5 Différents modes de raisonnement

**Réurrence forte.**

**Exemple.**

**Exercice 32.**

**Exercice 72.**

**Exercice 79.**

**Exercice 82.**

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = 2^{n-1}$ .