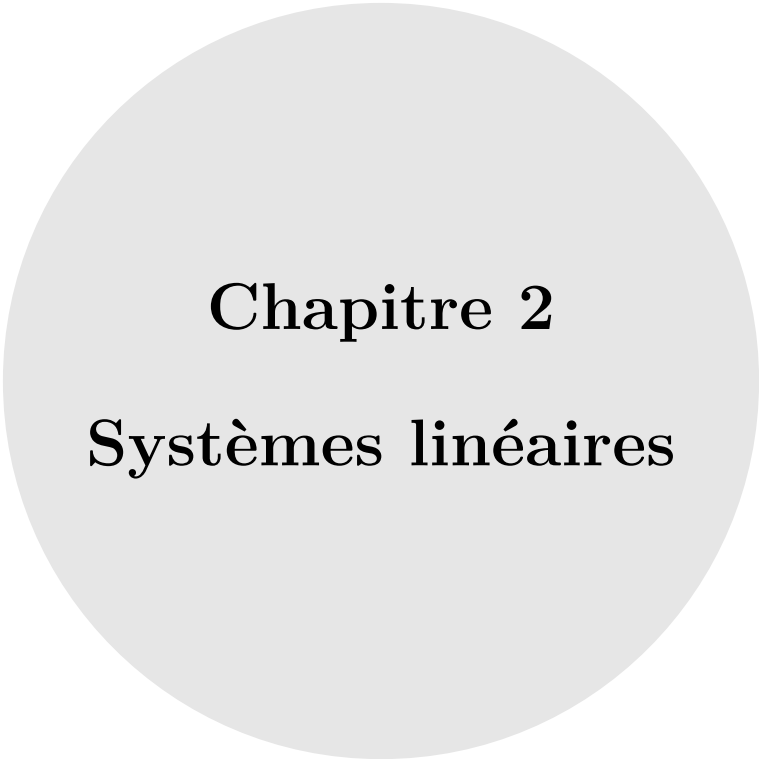




Chapitre 2

Systemes linéaires

Mathématiques avec M. Cacitti

PCSI du lycée Paul Eluard de Saint-Denis

Année scolaire 2026-2027

1 Résolution de systèmes linéaires à deux inconnues

Définition 1 : Système linéaire à deux inconnues

Un **système linéaire à deux inconnues** est une famille d'équations de la forme

$$a_i x + b_i y = c_i$$

où $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

De plus on dit qu'il s'agit d'un **système linéaire à deux équations** s'il est de la forme :

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Exemples. Les systèmes suivants sont des systèmes linéaires à deux inconnues.

- $(S_1) : 3x + y = 4$
- $(S_2) : \begin{cases} 3x + y = 4 \\ -x + 4y = 1 \end{cases}$
- $(S_3) : \begin{cases} 3x + y = 4 \\ -x + 4y = 1 \\ 2x - 7y = -1 \end{cases}$

Définition 2 : Résolution par opération sur les lignes

Pour résoudre un système linéaire de la forme

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

où l'on effectue les opérations élémentaires suivantes.

- On multiplie les lignes L_1 et L_2 par des réels pour obtenir un système équivalent de la forme

$$\begin{cases} \alpha x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

où il y a le même coefficient α devant l'inconnue x .

On note alors ces opérations $L_1 \leftarrow k_1 L_1$ et $L_2 \leftarrow k_2 L_2$ où k_1 et k_2 sont les réels pour obtenir $k_1 a_1 = k_2 a_2 = \alpha$.

- On soustrait une ligne à une autre pour obtenir un système de la forme

$$\begin{cases} \alpha x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ (\beta_2 - \beta_1)y = \gamma_2 - \gamma_1. \end{cases}$$

On note alors cette opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

- On détermine la valeur de l'inconnue y grâce à la seconde ligne puis la valeur de l'inconnue x grâce à la première ligne.

Remarque. Attention à la rédaction qui doit être réalisée avec des équivalences successives pour que le raisonnement soit juste.

Exemple. On considère le système $(S) : \begin{cases} 3x + y = 4 \\ -x + 4y = 1. \end{cases}$

$$\text{Soient } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Alors } \begin{cases} 3x + y = 4 \\ -x + 4y = 1 \end{cases} \begin{array}{c} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow -3L_2} \\ \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ \xLeftrightarrow{} \\ \xLeftrightarrow{} \\ \xLeftrightarrow{} \end{array} \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 3x - 12y = -3 \\ 3x + y = 4 \\ -13y = -7 \\ 3x + y = \frac{4}{7} \\ y = \frac{7}{13} \\ 3x = 4 - \frac{7}{13} = \frac{45}{13} \\ y = \frac{7}{13} \\ x = \frac{15}{13} \\ y = \frac{7}{13} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions du système (S) est $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{15}{13}, \frac{7}{13} \right) \right\}$.

Exercice 1. Résoudre le système $(S) : \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 2y = 3 \\ 2x - 7y = -1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque. Il existe aussi la méthode par substitution qui consiste à isoler l'une des inconnues dans l'une des équations et à reporter son expression dans l'autre équation. Cette méthode ne sera ni utile ni détaillée.

Remarque. Les équations de la forme $a_i x + b_i y = c_i$ sont des **équations de droites** dans le plan $\mathbb{R}^2$. Ainsi les solutions du système sont les **intersections éventuelles** entre ces droites. Il peut y avoir :

- 0 intersection s'il s'agit de droites parallèles ou s'il s'agit d'au moins trois droites qui ne s'intersectent pas en un même point ;
- 1 intersection s'il s'agit de droites sécantes en un même point ;
- une infinité de solutions s'il s'agit d'équations de la même droite.

Exemples.

- D'après l'exemple précédent, les droites d'équations $3x + y = 4$ et $-x + 4y = 1$ s'intersectent au point $\left(\frac{15}{13}, \frac{7}{13} \right)$.
- Les droites d'équations $x + 9y = 8$ et $2x + 18y = 16$ sont confondues car $x + 9y = 8 \xLeftrightarrow{\times 2} 2x + 18y = 16$.

Autrement dit, le système $(S) : \begin{cases} x + 9y = 8 \\ 2x + 18y = 16 \end{cases}$ admet une infinité de solutions dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(8 - 9y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

- D'après l'exercice précédent, le système $(S) : \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 2y = 3 \\ 2x - 7y = -1 \end{cases}$ n'admet pas de solution. Autrement dit, les droites d'équations $2x + 5y = 3$, $3x - 2y = 3$ et $2x - 7y = -1$ ne sont pas sécantes en un même point.

Exercice 2. Déterminer l'intersection éventuelle des droites d'équation $6x + 12y = 8$ et $3x - y = 9$.

2 Résolution de systèmes linéaires à trois inconnues

Définition 3 : Système linéaire à trois inconnues

Un **système linéaire à trois inconnues** est une famille d'équations de la forme

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i$$

où $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ et d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

De plus on dit qu'il s'agit d'un **système linéaire à trois équations** s'il est de la forme :

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3. \end{cases}$$

Exemples. Les systèmes suivants sont des systèmes linéaires à trois inconnues.

- $(S_1) : 4x + 5y + 6z = 7$
- $(S_2) : \begin{cases} 5x - 7y + 3z = 9 \\ -4x + y = 6 \end{cases}$
- $(S_3) : \begin{cases} 9x + 4y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$
- $(S_4) : \begin{cases} 4x - 3y + 3z = -2 \\ -x + 3y + 9z = -3 \\ 4x - 8y + 7z = 12 \\ -2x + 2y + 3z = -4 \end{cases}$

Définition 4 : Résolution par opérations sur les lignes

Pour résoudre un système linéaire de la forme

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

où effectue les opérations élémentaires suivantes.

- On multiplie les lignes L_1, L_2 et L_3 par des réels pour obtenir un système équivalent de la forme

$$\begin{cases} \alpha x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

où il y a le même coefficient α devant l'inconnue x .

On note alors ces opérations $L_1 \leftarrow k_1 L_1, L_2 \leftarrow k_2 L_2$ et $L_3 \leftarrow k_3 L_3$ où k_1, k_2 et k_3 sont les réels pour obtenir $k_1 a_1 = k_2 a_2 = k_3 a_3 = \alpha$.

- On soustrait une ligne à une autre pour obtenir un système de la forme

$$\begin{cases} \alpha x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ (\beta_2 - \beta_1)y + (\gamma_2 - \gamma_1)z = \delta_2 - \delta_1 \\ (\beta_3 - \beta_1)y + (\gamma_3 - \gamma_1)z = \delta_3 - \delta_1 \end{cases}$$

On note alors ces opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

- On détermine les valeurs des inconnues y et z grâce à la résolution du système 2×2 des deux dernières lignes puis on en déduit la valeur de l'inconnue x grâce à la première ligne.

Exemple. On considère le système $(S) : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases} & \begin{array}{l} \Longleftrightarrow \\ L_1 \leftarrow 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{array} \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 12 \\ 2x - y + z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases} \\ & \begin{array}{l} \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 12 \\ -3y - z = -9 \\ 2y - 4z = -10 \end{cases} \\ & \begin{array}{l} \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{3}{2}L_3 \end{array} \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 12 \\ 3y + z = 9 \\ 3y - 6z = -15 \end{cases} \\ & \begin{array}{l} \Longleftrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 12 \\ 3y + z = 9 \\ -7z = -24 \end{cases} \\ & \begin{array}{l} \Longleftrightarrow \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \end{array} \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 12 \\ 3y + z = 9 \\ z = \frac{24}{7} \end{cases} \\ & \begin{array}{l} \Longleftrightarrow \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \end{array} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y = \frac{3}{3} - \frac{z}{3} = \frac{13}{7} \\ z = \frac{24}{7} \end{cases} \\ & \begin{array}{l} \Longleftrightarrow \end{array} \begin{cases} x = 6 - y - z = \frac{5}{7} \\ y = \frac{13}{7} \\ z = \frac{24}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions du système (S) est $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{24}{7} \right) \right\}$.

Exercice 3. Résoudre le système $(S) : \begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ 3x - 2y + 4z = 8 \\ 5x + y + 2z = 9 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Remarque. Les équations de la forme $a_ix + b_iy + c_iz = d_i$ sont des **équations de plans** dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Ainsi les solutions du système sont les **intersections éventuelles** entre ces plans. Il peut y avoir :

- 0 intersection s'il s'agit de plans parallèles non confondus ou s'il s'agit d'au moins quatre plans qui n'intersectent pas en un même point ;
- 1 intersection s'il s'agit de plans sécants en un même point ;
- une infinité de solutions représentées par l'équation d'une droite dans l'espace ;
- une infinité de solutions représentée par l'équation d'un plan s'il s'agit d'équations du même plan.

Exemples.

- Les plans d'équations $x + y + z = 3$ et $2x + 2y + 2z = 1$ sont parallèles non confondus, autrement dit, le système $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$ n'admet pas de solution. En effet, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0 = -5 \end{cases}$ avec $0 = -5$ impossible.
- D'après l'exemple précédent, les plans d'équations $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$ et $x + 2y - z = 1$ sont sécants au point $\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{24}{7} \right)$.

- Les plans d'équations $x + 2y + 3z = 0$, $4x + 5y + 6z = 0$ et $7x + 8y + 9z = 0$ sont sécants en une droite

d'équation paramétrique
$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

En effet, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} & \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ L_1 & \leftarrow 28L_1 \\ L_2 & \leftarrow 7L_2 \\ L_3 & \leftarrow 4L_3 \end{aligned} \begin{cases} 28x + 56y + 84z = 0 \\ 28x + 35y + 42z = 0 \\ 28x + 32y + 36z = 0 \end{cases} \\ & \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ L_2 & \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 & \leftarrow L_3 - L_1 \end{aligned} \begin{cases} 28x + 56y + 84z = 0 \\ -21y - 42z = 0 \\ -24y - 48z = 0 \end{cases} \\ & \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ L_2 & \leftarrow -\frac{1}{7}L_2 \\ L_3 & \leftarrow -\frac{1}{8}L_3 \end{aligned} \begin{cases} 28x + 56y + 84z = 0 \\ 3y + 6z = 0 \\ 3y + 6z = 0 \end{cases} \\ & \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ L_3 & \leftarrow L_3 - L_2 \end{aligned} \begin{cases} 28x + 56y + 84z = 0 \\ 3y + 6z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ & \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ L_1 & \leftarrow \frac{1}{28}L_1 \\ L_2 & \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \end{aligned} \begin{cases} 28x + 56y + 84z = 0 \\ 3y + 6z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z = 4z - 3z = z \\ y = -2z. \end{cases} \end{aligned}$$

- Les équations $x + y + z = 1$, $2x + 2y + 2z = 2$ et $4x + 4y + 4z = 4$ sont des équations du même plan

donc le système
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 4x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$$
 est équivalent au système
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \end{cases}$$
 qui admet une infinité de solutions représentée par l'équation d'un plan.

Exercice 4. Déterminer les intersections éventuelles des plans d'équations $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$ et $3x + y + 2z = 9$.

3 Méthode du pivot

Définition 5 : Système linéaire de n équations à p inconnues

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Un **système linéaire de n équations à p inconnues** est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où l'inconnue est $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, les réels $a_{i,j}$ sont les coefficients du système et les réels b_i sont les seconds membres.

De plus on dit que le système est :

- homogène** si les seconds membres sont tous nuls ;
- compatible** s'il possède (au moins) une solution ;
- de Cramer** s'il possède une unique solution.

Remarque. Un système homogène est toujours compatible car $(0, 0, \dots, 0)$ est (au moins) une solution.

Exemples.

- Le système $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$ est un système homogène donc compatible.

De plus, après résolution, $(0, 0)$ est l'unique solution donc il s'agit d'un système de Cramer.

- Le système $\begin{cases} 6x + 12y = 9 \\ 4x + 8y = 6 \end{cases}$ n'est pas un système homogène et est compatible car $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ est une solution.

Par contre il ne s'agit pas d'un système de Cramer car, après résolution, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 6x + 12y = 9 \\ 4x + 8y = 6 \end{cases} \iff 2x + 4y = 3.$$

Donc l'ensemble des solutions est la droite d'équation $2x + 4y = 3$.

Définition 6 : Pivot

Dans un système linéaire, le **pivot** d'une ligne non nulle est le premier coefficient non nul de la ligne.

Exemple. Le système $\begin{cases} 6x - 7y + 3z = 1 \\ 3x \quad \quad + z = 4 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$ a comme pivots :

- 6 sur la première ligne ;
- 3 sur la seconde ligne ;
- 2 sur la troisième ligne.

Définition 7 : Système échelonné

Un système est **échelonné** si :

- les lignes sous une ligne nulle sont toutes nulles ;
- le pivot d'une ligne non nulle est strictement à droite du pivot de la ligne précédente.

Exemples.

- Le système $\begin{cases} 6x - 7y + 3z = 1 \\ 3x \quad \quad + z = 4 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$ n'est pas échelonné car le pivot de la seconde ligne est au même niveau que le pivot de la première ligne.
- Le système $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y - z = -2 \\ z = -1 \end{cases}$ est échelonné et ses pivots sont 1, 3 et 1.

Définition 8 : Opérations élémentaires

Soit (S) un système dont les lignes sont notées L_i . Les trois **opérations élémentaires** sont :

- $L_i \longleftrightarrow L_j$ pour $i \neq j$ qui échange les lignes L_i et L_j ;
- $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ pour $\lambda \neq 0$ qui multiplie la ligne L_i par λ ;
- $L_i \longleftarrow L_i + \mu L_j$ pour $i \neq j$ et μ quelconque qui ajoute μL_j à ligne L_i .

Exemples.

- $\begin{cases} 6x - 7y + 3z = 1 \\ 3x \quad \quad + z = 4 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} 3x \quad \quad + z = 4 \\ 6x - 7y + 3z = 1 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 6x - 7y + 3z = 1 \\ 3x \quad \quad + z = 4 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2} \begin{cases} 6x - 7y + 3z = 1 \\ 6x \quad \quad + 2z = 8 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{rrcr} 6x & - & 7y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & & & + & z & = & 4 \\ & & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left\{ \begin{array}{rrcr} & - & 7y & + & z & = & -7 \\ 3x & & & + & z & = & 4 \\ & & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Définition 9 : Méthode du pivot

Soit (S) un système linéaire. La **méthode du pivot** (ou **du pivot de Gauss** ou **du pivot de Gauss-Jordan**) est un algorithme qui permet de transformer le système (S) en un système échelonné par des opérations élémentaires.

- Etape 1 : On choisit une ligne non nulle qu'on place en première position grâce à un échange de lignes.
- Etape 2 : On annule tous les coefficients situés sous le pivot de la première ligne en effectuant des opérations sur les lignes.
- Etape 3 : On recommence le procédé sur le sous-système obtenu.
- On poursuit jusqu'à obtenir un système échelonné.

Exemple. On considère le système $\left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ 2x & - & 57y & + & z & = & -33 \\ -x & + & 6y & - & 3z & = & -1. \end{array} \right.$

Alors, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ 2x & - & 57y & + & z & = & -33 \\ -x & + & 6y & - & 3z & = & -1 \end{array} \right. \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & - & 63y & - & 7z & = & -49 \\ & & 9y & + & z & = & 7 \end{array} \right.$$

$$\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{7}L_2} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & & 9y & + & z & = & 7 \\ & & 9y & + & z & = & 7 \end{array} \right. \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & & 9y & + & z & = & 7 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \xLeftrightarrow{} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & & 9y & + & z & = & 7. \end{array} \right.$$

Ainsi le système échelonné associé est $\left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & & 9y & + & z & = & 7. \end{array} \right.$

Exercice 5. Echelonner le système $\left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ x & - & y & + & 2z & = & 5. \end{array} \right.$

Remarque. Un système échelonné compatible est résoluble en remontant les équations en commençant par la dernière.

Exemple. D'après l'exemple précédent, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ 2x & - & 57y & + & z & = & -33 \\ -x & + & 6y & - & 3z & = & -1 \end{array} \right. \xLeftrightarrow{} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & & 9y & + & z & = & 7. \end{array} \right. \xLeftrightarrow{} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & & 9y & = & 7 - z. \end{array} \right. \xLeftrightarrow{} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 8 \\ & & y & = & \frac{7}{9} - \frac{z}{9}. \end{array} \right. \xLeftrightarrow{} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & = & 8 - 3y - 4z & = & \frac{17}{3} - \frac{11}{3}z \\ y & = & \frac{7}{9} - \frac{z}{9}. \end{array} \right.$$

Ainsi l'ensemble des solutions de ce système est la droite d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{17}{3} - \frac{11}{3}t \\ y = \frac{7}{9} - \frac{t}{9} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + z = 9 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$ par la méthode du pivot.

4 Exercices

4.1 Résolution de systèmes linéaires à deux inconnues

Exercice 7. Résoudre les systèmes suivants.

- $(S_1) : \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$
- $(S_2) : \begin{cases} x - y = 2 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$

Exercice 8. Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. En discutant suivant sa valeur, résoudre le système suivant :

$$(S_m) : \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 8. \end{cases}$$

Exercice 9. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- $(S_1) : \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$
- $(S_2) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$
- $(S_3) : \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$

4.2 Résolution de systèmes linéaires à trois inconnues

Exercice 10. Résoudre les systèmes suivants.

- $(S_1) : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = -2 \\ 3x - 2y + 4z = -2 \end{cases}$
- $(S_2) : \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$

Exercice 11. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ distincts : $a \neq b, b \neq c$ et $a \neq c$. Résoudre le système

$$(S) : \begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3. \end{cases}$$

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un paramètre. Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

4.3 Méthode du pivot

Exercice 13. Résoudre, à l'aide de la méthode du pivot, les systèmes suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- $(S_1) : \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$
- $(S_2) : \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$
- $(S_3) : \begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$
- $(S_4) : \begin{cases} x + 4y = 11 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$

Exercice 14. Résoudre, à l'aide de la méthode du pivot, les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- $(S_1) : \begin{cases} 2x + 3y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - 3z = -2 \end{cases}$
- $(S_2) : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$
- $(S_3) : \begin{cases} x + y - z = 8 \\ x + 2y - 3z = 5 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases}$
- $(S_4) : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 8z = -2 \end{cases}$
- $(S_5) : \begin{cases} x + 2y - 3z = 13 \\ 2x - 5y - 3z = -7 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$
- $(S_6) : \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 5y - 3z = 1 \end{cases}$

Exercice 15. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre, par la méthode du pivot, le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) : \begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a+1)z = 3 \\ x + ay + 3z = 4. \end{cases}$$

4.4 Interprétations géométriques

Exercice 16. Soit $t \in \mathbb{R}$ un paramètre. En discutant suivant sa valeur, résoudre le système suivant et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu :

$$(S_t) : \begin{cases} x + 3y = 2 \\ tx - y = -1. \end{cases}$$

Exercice 17. On considère, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les plans :

- P_1 d'équation $x + y + z = 3$;
 - P_2 d'équation $2x - y + z = 2$;
 - P_3 d'équation $3x + 2z = 5$.
1. Les plans P_1 et P_2 sont-ils parallèles ?
 2. Déterminer l'intersection des plans P_1 et P_2 .

3. Résoudre, par la méthode du pivot, le système
$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & & & + & 2z & = & 5. \end{cases}$$

4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 18. Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les plans :

- P_1 d'équation $ax + y + z = 0$;
- P_2 d'équation $2x - y - z = 1$.

A quelle condition sur le réel a , les plans P_1 et P_2 sont-ils sécants ? Dans ce cas, déterminer leur intersection.

Table des matières

1	Résolution de systèmes linéaires à deux inconnues	2
2	Résolution de systèmes linéaires à trois inconnues	4
3	Méthode du pivot	6
4	Exercices	9

Programme officiel de ce chapitre

Contenus	Capacités et commentaires
Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$.
Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Notations $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_i \longleftarrow \lambda L_i (\lambda \neq 0)$, $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$.