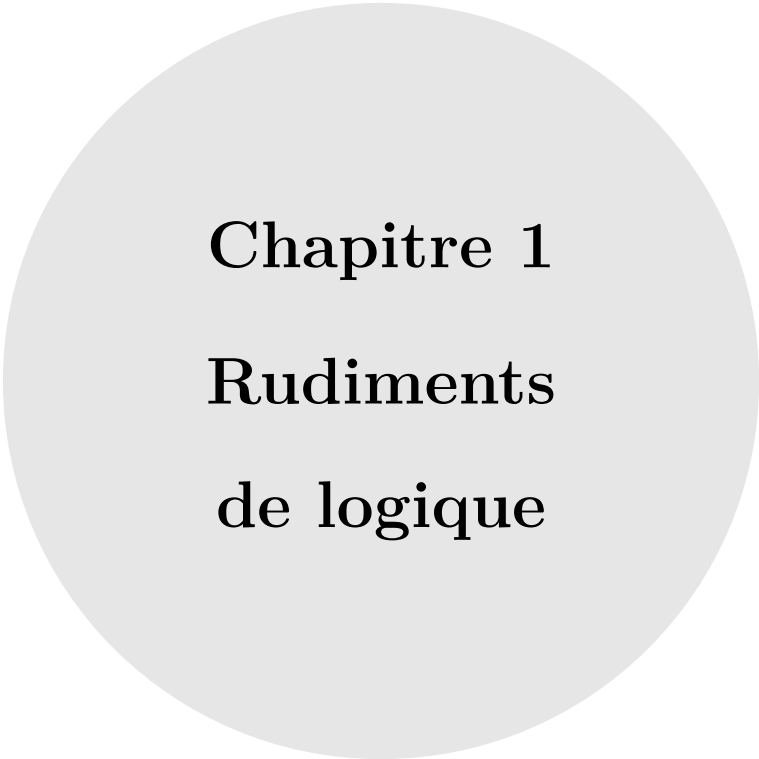




Chapitre 1

Rudiments de logique

Mathématiques avec M. Cacitti

PCSI du lycée Paul Eluard de Saint-Denis

Année scolaire 2026-2027

1 Propositions, équivalences et négations

Définition 1 : Proposition

Une **proposition** (ou **assertion**) est une phrase mathématique qui est soit vraie (V) soit fausse (F).

Exemples.

- « 3 » n'est ni vrai ni faux donc ce n'est pas une assertion.
- « $3 \geq 10$ » est une assertion fausse.
- « La fonction $x \mapsto x^2$ est positive sur $\mathbb{R}$. » est une assertion vraie contrairement à « La fonction $x \mapsto x^3$ est positive sur $\mathbb{R}$. » qui est une assertion fausse.

Exercice 1. Parmi les phrases suivantes, lesquelles sont des assertions ? De plus, préciser si elles sont vraies ou fausses.

- A : « $2 + 2 = 4$ »
- B : « $3 \leq 2$ »
- C : « Le chat fait miaou. »
- D : « La Terre est plate. »
- E : « Comment allez-vous ? »

Définition 2 : Propositions équivalentes

Soient P et Q deux propositions. La proposition d'**équivalence** entre les propositions P et Q , notée $P \iff Q$, est la proposition définie par :

- $P \iff Q$ est vraie si P et Q ont la même valeur logique (vrai ou faux) ;
- $P \iff Q$ est fausse sinon.

Remarque. Nous pouvons résumer cette définition par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque. L'équivalence $P \iff Q$ peut se lire de différentes façons.

- P est vraie si et seulement si Q est vraie.
- Pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie.
- P est une condition nécessaire et suffisante pour Q .

Autrement dit, l'équivalence pour les propositions joue le même rôle que l'égalité pour les nombres.

Exemples.

- Dans un triangle ABC , les assertions « Le triangle ABC est rectangle en A . » et « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » sont équivalentes.
- Pour un réel x , les assertions « $x^2 = 2$ » et « $x = \sqrt{2}$ » ne sont pas équivalentes. En effet « $x = \sqrt{2}$ » n'est pas une condition nécessaire pour avoir « $x^2 = 2$ » car on peut également avoir $x = -\sqrt{2}$.

Proposition 1 : Propriété de l'équivalence

Soient A, B et C trois propositions. L'équivalence vérifie les propriétés suivantes.

- **Réflexivité** : l'équivalence $A \iff A$ est toujours vraie.
- **Symétrie** : les assertions $A \iff B$ et $B \iff A$ sont équivalentes.
- **Transitivité** : si les équivalences $A \iff B$ et $B \iff C$ sont vraies alors l'équivalence $A \iff C$ est également vraie.

Démonstration. On établit les tables de vérité correspondantes.

Remarque. La transitivité de l'équivalence nous permet de raisonner par équivalences successives. Par exemple, pour résoudre des équations.

Exemple. L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - x = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, est $S = \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned} \text{En effet, pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x = 0 &\iff x(x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Exercice 2. Résoudre, par équivalences, l'équation $x^2 = 4$.

Définition 3 : Négation d'une proposition

Soit P une proposition. La **négation** de la proposition P , notée $\text{non}(P)$ ou $\neg P$, est la proposition définie par :

- $\text{non}(P)$ est vraie si P est fausse ;
- $\text{non}(P)$ est fausse si P est vraie.

Remarque. Nous pouvons résumer cette définition par la table de vérité suivante :

P	$\text{non}(P)$
V	F
F	V

Exemples.

- Pour P_1 l'assertion « $3 \geq 10$ », la négation $\text{non}(P_1)$ est « $3 < 10$ » qui est vraie.
- Pour P_2 l'assertion « La fonction $x \mapsto x^2$ est positive sur $\mathbb{R}$. », la négation $\text{non}(P_2)$ est « La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas positive sur $\mathbb{R}$. » qui est fausse.

Exercice 3. Déterminer les négations des assertions de l'exercice 1.

Proposition 2 : Négation de la négation

Soit P une assertion. Les assertions P et $\text{non}(\text{non}(P))$ sont équivalentes : $P \iff \text{non}(\text{non}(P))$.

Démonstration. On établit la table de vérité des assertions P , $\text{non}(P)$ et $\text{non}(\text{non}(P))$.

2 Conjonctions et disjonctions

Définition 4 : Conjonction d'assertions

Soient P et Q deux propositions. La **conjonction** des propositions P et Q , notée $P \wedge Q$ ou aussi P et Q , est la proposition définie par :

- $P \wedge Q$ est vraie si P et Q sont vraies ;
- $P \wedge Q$ est fausse sinon.

Remarque. Nous pouvons résumer cette définition par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples. Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, P : « La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ » et Q : « La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».

- Si $f = |\cdot|$ la fonction valeur absolue alors l'assertion P est vraie et l'assertion Q est fausse (car f n'est pas dérivable en 0) donc la conjonction $P \wedge Q$ est fausse.
- Si $f = 1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f = -1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ alors les assertions P et Q sont fausses donc la conjonction $P \wedge Q$ est fausse.
- Si f est la fonction carrée alors les assertions P et Q sont vraies donc la conjonction $P \wedge Q$ est vraie.

Exercice 4. On considère la fonction $f = \cos$ définie sur $\mathbb{R}$ et les assertions suivantes.

- P_1 : « La fonction f est paire. »
- P_2 ; « La fonction f est 2π . »
- P_3 : « $f' = \sin$ »

Déterminer les valeurs logiques des conjonctions $P_1 \wedge P_2$, $P_2 \wedge P_3$ et $P_1 \wedge P_3$.

Proposition 3 : Propriétés de la conjonction

Soient A, B et C trois propositions. L'opérateur $\wedge$ vérifie les propriétés suivantes.

- **Commutativité** : $A \wedge B \iff B \wedge A$.
- **Associativité** : $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$. On pourra donc écrire $A \wedge B \wedge C$.

Démonstration. On établit les tables de vérité correspondantes.

Exemple. Soit P une assertion. L'assertion $P \wedge \text{non}(P)$ est toujours fausse.

Exercice 5. On considère trois proposition A, B et C . Simplifier les assertions suivantes

1. $A \wedge (B \wedge (C \wedge A))$
2. $(A \wedge B) \wedge (C \wedge \text{non}(B))$
3. $((\text{non}(A) \wedge \text{non}(C)) \wedge \text{non}(B)) \wedge \text{non}(C)$.

Définition 5 : Disjonction

Soient P et Q deux propositions. La **disjonction** des propositions P et Q , notée $\vee$ ou aussi P ou Q , est la proposition définie par :

- $P \vee Q$ est vraie si P est vraie ou si Q est vraie ;
- $P \vee Q$ est fausse sinon.

Remarque. Nous pouvons résumer cette définition par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque. Attention : le « ou » mathématique diffère du « ou » des moldus qui est exclusif. Si un restaurant propose « fromage ou dessert », on a rarement le droit de choisir les deux.

Exemple. Soit P une assertion. L'assertion $P \vee \text{non}(P)$ est toujours vraie. En effet soit P est vraie soit P est fausse et dans ce cas $\text{non}(P)$ est vraie.

Exercice 6. Déterminer les valeurs logiques des disjonctions $P_1 \vee P_2$, $P_2 \vee P_3$ et $P_1 \vee P_3$ où P_1, P_2 et P_3 sont les assertions de l'exercice 4.

Proposition 4 : Propriétés de la disjonction

Soient A, B et C trois assertions. L'opérateur $\vee$ vérifie les propriétés suivantes.

- **Commutativité** : $A \vee B \iff B \vee A$.
- **Associativité** : $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$. On pourra donc écrire $A \vee B \vee C$.

Démonstration. On établit les tables de vérité correspondantes.

Exemple. Dans un lycée, un élève peut participer à un concours scientifique s'il vérifie au moins une des conditions suivantes.

- P : « L'élève a une moyenne générale supérieure à 15. »
- Q : « L'élève a obtenu un prix lors des olympiades de mathématiques. »
- R : « L'élève est recommandé par son professeur principal. »

Dans ce cas les disjonctions $P \vee Q$ et $Q \vee P$ ont la même signification : « L'élève a une moyenne générale supérieure à 15 ou a obtenu un prix lors des olympiades de mathématiques. ». Le « ou » étant inclusif, l'élève peut avoir une moyenne générale supérieure à 15 et avoir obtenu un prix lors des olympiades de mathématiques.

De plus les disjonctions $(P \vee Q) \vee R$ et $P \vee (Q \vee R)$ ont la même signification : « L'élève a une moyenne générale supérieure à 15 ou a obtenu un prix lors des olympiades de mathématiques ou est recommandé par son professeur principal. ».

Exercice 7. On considère les assertions suivantes.

- P : « Je vais au cinéma. »
- Q : « Je vais à la piscine. »
- R : « Je ne vais pas à la piscine. »

Traduire en français le plus simplement possible les disjonctions $P \vee Q$, $Q \vee P$, $P \vee (Q \vee R)$ et $(P \vee Q) \vee (P \vee R)$.

Proposition 5 : Lois de Morgan

Soient P et Q deux propositions. Alors nous avons les équivalences suivantes :

- $\text{non}(P \wedge Q) \iff \text{non}(P) \vee \text{non}(Q)$;
- $\text{non}(P \vee Q) \iff \text{non}(P) \wedge \text{non}(Q)$.

Démonstration. On établit (encore) les tables de vérité correspondantes.

Remarque. Autrement dit, la négation échange les « et » et les « ou ».

Exemples.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. La négation de $2 \leq x < 3$ est : $2 > x$ ou $x \geq 3$. En effet $2 \leq x < 3 \iff 2 \leq x$ et $x < 3$. Donc la négation transforme le « et » en « ou » et inverse les inégalités.
- Pour avoir son baccalauréat, on peut soit bien travailler soit avoir des facilités. Donc pour ne pas avoir son baccalauréat, on doit ne pas bien travailler et ne pas avoir de facilités.

Exercice 8. Donner la négation des assertions suivantes.

1. J'ai un bon niveau en mathématiques et en physique.
2. Ce midi je mange de la viande ou du poisson.

Proposition 6 : Distributivités

Soient A, B et C trois assertions.

- **Distributivité de $\wedge$ sur $\vee$:** $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
- **Distributivité de $\vee$ sur $\wedge$:** $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Démonstration.

- On établit la table de vérité correspondante.
- On raisonne par négation pour le second point.

Exemple. Soient A, B, C et D quatre événements. Alors, par distributivité,

$$(A \vee B) \wedge (C \wedge D) \iff (A \wedge (C \wedge D)) \vee (B \wedge (C \wedge D)) \iff (A \wedge C \wedge D) \vee (B \wedge C \wedge D).$$

Autrement dit, pour que cette assertion soit vraie, nous pouvons l'exprimer des deux manières suivantes :

- soit A, C et D sont vraies, soit B, C et D sont vraies ;
- A ou B est vraie, et C et D sont vraies.

Exercice 9. On considère les assertions suivantes.

- P : « L'élève maîtrise Python. »
- Q : « L'élève parle anglais. »
- R : « L'élève parle espagnol. »

Transformer les assertions $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ et $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ et les traduire en français.

3 Implications

Définition 6 : Implication

Soient P et Q deux propositions. L'**implication** $P \implies Q$ est la proposition définie par la table de vérité suivante.

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque. L'implication $P \implies Q$ peut se lire de différentes façons.

- Si P est vraie alors Q est vraie.
- Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie.
- Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie.
- P est une condition suffisante pour Q .
- Q est une condition nécessaire pour P .

Remarques.

- Si l'assertion P est fausse alors l'implication $P \implies Q$ est vraie, quelle que soit la valeur logique de l'assertion Q .
- Si l'assertion P est vraie alors l'implication $P \implies Q$ est vraie si et seulement si l'assertion Q est vraie.

Remarque. Attention à ne pas confondre $P \implies Q$ et P donc Q . Dans le premier cas, on dit que si P est vraie alors Q l'est également. Dans le second cas, on affirme que P est vraie et on en déduit que Q l'est également. Il est donc très rare d'utiliser des implications $\implies$ dans la rédaction d'un raisonnement.

Exemples.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'implication $x \geq 0 \implies x + 1 \geq 0$ est vraie. En effet si $x \geq 0$ alors $x + 1 \geq 0 + 1 = 1 \geq 0$. Par contre l'implication $x + 1 \geq 0 \implies x \geq 0$ est fausse car, pour $x = -1$, nous avons $x + 1 = 0 \geq 0$ et $x < 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. L'implication « n multiple de 3 $\implies n$ pair » est fausse. Il ne suffit pas que n soit un multiple de 3 (0, 3, 6, 9, ...) pour que n soit pair.
- L'implication « Si je suis Batman alors $2 = 1$ » est vraie. $2 \neq 1$ mais je ne suis pas Batman (à priori) donc, en partant d'une hypothèse fausse, on peut montrer que n'importe quelle assertion est vraie.

Remarque. Pour montrer qu'une implication $P \implies Q$ est vraie, le **raisonnement direct** consiste à supposer que l'assertion P est vraie et à montrer que, dans ce cas, l'assertion Q est également vraie.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est pair alors n^2 est pair.

Proposition 7 : Assertion équivalente à l'implication

Soient P et Q deux assertions. Les assertions $P \implies Q$ et $\text{non}(P) \vee Q$ sont équivalentes :

$$[P \implies Q] \iff [\text{non}(P) \vee Q].$$

Démonstration. On établit la table de vérité correspondante.

Exemple. Soient $x \in \mathbb{R}$ et les propositions $P : \ll x \in [0, 1] \gg$ et $Q : \ll x \geq 0 \gg$.

Alors la négation de la proposition P est $\text{non}(P) : \ll x \notin [0, 1] \gg$. Autrement dit, $\text{non}(P) : x < 0$ ou $x > 1$.

Ainsi $\text{non}(P) \vee Q$ signifie : $x < 0$ ou $x > 1$ ou $x \geq 0$ ce qui est une proposition vraie.

Par conséquent l'implication $P \implies Q$ est également vraie. En effet si $x \in [0, 1]$ alors, en particulier, $x \geq 0$.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et on considère les assertions $P : \ll \text{La suite } u \text{ est convergente.} \gg$ et $Q : \ll \text{La suite } u \text{ est bornée.} \gg$. Déterminer la valeur logique de la disjonction $\text{non}(P) \vee Q$ et la traduire en français.

Corollaire 1 : Négation d'une implication

Soient P et Q deux assertions. La négation de $P \implies Q$ est $P \wedge \text{non}(Q)$:

$$\text{non}(P \implies Q) \iff [P \wedge \text{non}(Q)].$$

Démonstration. On utilise la proposition précédente et la négation d'une disjonction.

Remarque. En particulier, la négation d'une implication n'est pas une implication.

Remarque. Autrement dit, la négation de « si P alors Q » est qu'on peut avoir P vraie et Q fausse. Donc, pour montrer qu'une implication est fausse, on peut montrer que l'assertion P peut être vraie alors que l'assertion Q est fausse.

Exemple. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors l'implication $a < b \implies a^2 < b^2$ est fausse. En effet, pour $a = -2$ et $b = -1$, nous avons bien $a < b$ mais $a^2 = 4 > 1 = b^2$.

Exercice 12. Soient f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer si les implications suivantes sont vraies ou fausses.

1. $x \geq y \implies f(x) \geq f(y)$
2. $f(x) \geq f(y) \implies x \geq y$

Définition 7 : Réciproque d'une implication

Soient P et Q deux assertions. La **réciproque** de l'implication $P \implies Q$ est l'implication $Q \implies P$.

Exemple. La réciproque de la proposition « La nuit, tous les chats sont gris. » est « Si tous les chats sont gris alors il fait nuit. ».

Remarque. L'implication $P \implies Q$ et sa réciproque $Q \implies P$ ne sont pas équivalentes ! P implique Q ne veut pas dire que Q implique P .

Exemples.

- L'implication « S'il pleut alors il y a des nuages. » est vraie car pour, qu'il pleuve, il faut qu'il y ait des nuages. Par contre la réciproque « S'il y a des nuages alors il pleut. » est fausse car il ne suffit pas d'y avoir des nuages pour qu'il pleuve.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'implication « Si n est un multiple de 6 alors n est pair. ». Alors cette implication est vraie et sa réciproque est « Si n est pair alors n est un multiple de 6. ». En particulier la réciproque est également fausse car, pour $n = 2$, n est pair mais n'est pas un multiple de 6.

Exercice 13. Donner les réciproques des implications suivantes. Préciser quelles implications et quelles réciproques sont vraies.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 4$ alors $x^2 \geq 16$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si la suite u est décroissante alors $u_4 \leq u_0$.
3. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Si $f(0) < f(1)$ alors la fonction f est croissante.

Définition 8 : Contraposée d'une implication

Soient P et Q deux assertions. La **contraposée** de l'implication $P \implies Q$ est $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$.

Exemples.

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'implication « Si n est un multiple de 6 alors n est pair. ». Alors cette implication est vraie et sa contraposée est « Si n est impair alors n n'est pas un multiple de 6. ».
- Pour un triangle ABC , d'après le théorème de Pythagore, si le triangle ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Donc, par contraposée, si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A .

Proposition 8 : Equivalence entre implication et contraposée

Soient P et Q deux assertions. L'implication $P \implies Q$ et sa contraposée $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$ sont équivalentes :

$$[P \implies Q] \iff [\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)].$$

Démonstration. On établit les tables de vérité des implications $P \implies Q$ et $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\sin(x) = 0$ alors $x = k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Donc, par contraposée, si $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $\sin(x) \neq 0$.

Remarque. Pour montrer qu'une implication est vraie, le **raisonnement par contraposée** consiste à montrer que sa contraposée est vraie.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $x^2 > 0 \implies x \neq 0$, nous pouvons raisonner par contraposée. Si $x = 0$ alors $x^2 = 0 \leq 0$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Proposition 9 : Double implication

Soient P et Q deux assertions. L'équivalence $P \iff Q$ et la conjonction $[P \implies Q] \wedge [Q \implies P]$ sont équivalentes :

$$(P \iff Q) \iff ([P \implies Q] \wedge [Q \implies P]).$$

Démonstration. On établit les tables de vérité de l'équivalence $P \iff Q$ et de la conjonction $[P \implies Q] \wedge [Q \implies P]$.

Remarque. Pour montrer une équivalence $P \iff Q$, le **raisonnement par double implication** consiste à montrer que les implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$ sont vraies.

Exemple. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est pair si et seulement si n^2 est pair.

Exercice 15. Soient P et Q deux assertions. Réécrire $P \iff Q$ uniquement avec les opérateurs de négation, de conjonction et de disjonction.

Proposition 10 : Transitivité de l'implication

Soient A, B et C trois assertions. Si les implications $A \implies B$ et $B \implies C$ sont vraies alors l'implication $A \implies C$ est également vraie.

Démonstration. On suppose que les implications $A \implies B$ et $B \implies C$ sont vraies.

Donc, d'après la proposition 7, les disjonctions $\text{non}(A) \vee B$ et $\text{non}(B) \vee C$ sont vraies.

Donc la disjonction $(\text{non}(A) \vee B) \vee (\text{non}(B) \vee C)$ est vraie.

Or $(\text{non}(A) \vee B) \vee (\text{non}(B) \vee C) \iff \text{non}(A) \vee C$.

Donc la disjonction $\text{non}(A) \vee C$ est vraie, d'où, d'après la proposition 7, l'implication $A \implies C$ est vraie.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on considère les assertions A : « n est divisible par 4. », B : « n est pair. » et C : « n^2 est pair. ». Alors nous avons $A \implies B$ et $B \implies C$. Donc si n est divisible par 4 alors n^2 est pair.

Exercice 16. Soit f une fonction affine sur $\mathbb{R}$: $f : x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer, par implications successives, que si $a > 0$ alors, pour tous $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$. Etudier la réciproque.

4 Quantificateurs

Une assertion peut dépendre d'un ou plusieurs paramètres.

Par exemple, pour n entier, on peut considérer $P(n)$: « n est pair ». L'assertion $P(1)$ est fausse et l'assertion $P(2)$ est vraie.

En général, on considère une assertion $P(x)$ dépendant d'un paramètre x et ce paramètre varie au sein d'un ensemble E donné. L'assertion $P(x)$ peut être vraie quel que soit l'élément x de l'ensemble E , elle peut n'être vraie que pour certaines valeurs de x et elle peut n'être jamais vraie.

Définition 9 : Quantificateur universel

Soit E un ensemble. L'assertion « Pour tout x dans E , l'assertion $P(x)$ est vraie. » s'écrit :

$$\forall x \in E, P(x).$$

Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

Remarque. Il s'agit également d'un symbole de ralliement entre jeunes automobilistes mathématiciens. En effet, placer son « A » de jeune conducteur à l'envers permet de communiquer aux autres qu'on fait des mathématiques.

Exemples.

- Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est positive si elle vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

Exercice 17. Retranscrire les assertions suivantes dans l'autre langage (français ou symbolique).

1. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ne s'annule jamais.
2. $\forall k \in \mathbb{Z}, \sin(k\pi) = 0$.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r .
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3}{2^n}$.

Définition 10 : Quantificateur existentiel

Soit E un ensemble. L'assertion « Il existe x dans E tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie. » s'écrit :

$$\exists x \in E, P(x).$$

Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

Remarque. Les assertions $\forall x \in E, P(x)$ et $\exists x \in E, P(x)$ ne dépendent pas de x ! On dit que la variable est muette car on ne l'entend pas. Autrement dit, on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable non encore utilisée.

Exemples.

1. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'annule si elle vérifie : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
2. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale du second degré si elle vérifie :
 $\exists a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$.
3. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique si elle vérifie : $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Exercice 18. Retranscrire les assertions suivantes dans l'autre langage (français ou symbolique).

1. Une fonction f atteint la valeur 1.
2. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend des valeurs négatives.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq x < n + 1$.

Proposition 11 : Négation avec un quantificateur

Soient E un ensemble et $P(x)$ une assertion qui dépend d'un paramètre $x \in E$.

- $\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E, \text{non}(P(x)))$
- $\text{non}(\exists x \in E, P(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non}(P(x)))$

Démonstration. On utilise les lois de Morgan appliquées et les équivalences suivantes.

- $[\forall x \in E, P(x)] \iff \bigwedge_{x \in E} P(x)$ où $\bigwedge_{x \in E} P(x)$ signifie la conjonction de tous les $P(x)$ pour $x \in E$.
- $[\exists x \in E, P(x)] \iff \bigvee_{x \in E} P(x)$ où $\bigvee_{x \in E} P(x)$ signifie la disjonction de tous les $P(x)$ pour $x \in E$.

Remarque. Autrement dit, la négation échange les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exemples.

- Le contraire de « Tous les jours de la semaine il fait beau. » est « Il existe un jour de la semaine où il ne fait pas beau. ».
- Pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ » est « $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$ ». Il s'agit ici de la négation de « La fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. ».

Exercice 19. Retranscrire les assertions dans l'autre langage (français ou symbolique) et écrire la négation en symbolique.

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\exists T \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée.

Exercice 20. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 9x + 20$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction positive.

Remarque. Pour montrer qu'une propriété qui commence par « $\forall x \in E$ », on commence par un fixer un élément x dans l'ensemble E .

Exemple. Si l'on souhaite montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors l'expression $2x^2 - 2x + 1$ est une expression du second degré de discriminant

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4 < 0.$$

De plus le coefficient dominant est $2 > 0$.

Donc l'expression est toujours (strictement) positive.

Ainsi $2x^2 - 2x + 1 > 0$.

En particulier, nous avons montré que : $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

Exercice 21. Montrer l'assertion suivante : $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$.

5 Différents modes de raisonnement

Définition 11 : Raisonnement direct

Pour montrer qu'une implication $P \implies Q$ est vraie, le **raisonnement direct** consiste à supposer que l'assertion P est vraie et à montrer que, dans ce cas, l'assertion Q est également vraie.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ alors la suite u est minorée par 1.

En effet : On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Or $\frac{4}{3} > 1$ et la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $\left(\frac{4}{3}\right)^n > 1^n = 1$.

Par conséquent la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^{-x}$ alors la fonction f vérifie l'équation différentielle $y' = -y$. Etudier la réciproque.

Définition 12 : Raisonnement par contraposée

Pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, le **raisonnement par contraposée** consiste à montrer la contraposée $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ en supposant que l'assertion Q est fausse et en montrant que l'assertion P est également fausse.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x^2 < 4$ alors $-2 < x < 2$.

En effet : par contraposée, supposons que $-2 < x < 2$ est faux. Autrement dit, $-2 \geq x$ ou $x \geq 2$.

- Si $-2 \geq x$ alors, en particulier $x \leq 0$.

Donc, par décroissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_-$, $x^2 \geq (-2)^2 = 4$.

- Si $x \geq 2 > 0$ alors, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $x^2 \geq 2^2 = 4$.

Par conséquent $x^2 \geq 4$. Donc, par contraposée, si $x^2 < 4$ alors $-2 < x < 2$.

Exercice 23. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer, par contraposée, que si $a + b > 10$ alors $a > 5$ ou $b > 5$.

Définition 13 : Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une assertion P est vraie, le **raisonnement par l'absurde** consiste à supposer que sa négation $\text{non}(P)$ est vraie et à aboutir à une contradiction.

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Alors cette suite diverge.

En effet, si l'on suppose, par l'absurde, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, on obtient alors $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$. Donc $0 = \frac{1}{\ell}$ ce qui est absurde.

Exercice 24. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Remarque. Quand l'assertion P est une implication $A \Rightarrow B$, la négation $\text{non}(P)$ est la conjonction $A \wedge \text{non}(B)$.

Exemple. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a^2 + b^2 = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$.

En effet : supposons par l'absurde que $a^2 + b^2 = 0$ et $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

- Si $a \neq 0$ alors $a^2 > 0$, d'où $0 = a^2 + b^2 > b^2 \geq 0$ ce qui est absurde.
- Si $b \neq 0$ alors $b^2 > 0$, d'où $0 = a^2 + b^2 > a^2 \geq 0$ ce qui est absurde.

Par conséquent si $a^2 + b^2 = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$.

Exercice 25. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $(a, b) = (0, 0)$.

Définition 14 : Raisonnement par équivalences successives

Grâce à la transitivité des équivalences, pour montrer une équivalence $A \iff B$, le **raisonnement par équivalences successives** consiste à montrer que l'assertion A est équivalente à une assertion A_1 qui est équivalente à une assertion A_2 , ..., qui est équivalente à l'assertion B .

Remarque. Ce raisonnement peut paraître plus rapide mais si les justifications ne sont pas directes, ce raisonnement est à éviter.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \iff x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{En effet } x^2 - 4x + 3 \geq 0 &\iff (x-1)(x-3) \geq 0 \\ &\iff [x-1 \geq 0 \text{ et } x-3 \geq 0] \text{ ou } [x-1 \leq 0 \text{ et } x-3 \leq 0] \\ &\iff [x \geq 1 \text{ et } x \geq 3] \text{ ou } [x \leq 1 \text{ et } x \leq 3] \\ &\iff x \geq 3 \text{ ou } x \leq 1 \\ &\iff x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[. \end{aligned}$$

Exercice 26. Résoudre, par équivalences successives, l'équation $\frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{x^2-4}$ d'inconnue réelle x .

Définition 15 : Raisonnement par double implication

Pour montrer une équivalence $A \iff B$, le **raisonnement par double implication** consiste à montrer les implications $A \implies B$ et $B \implies A$ séparément.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors n^2 est pair si et seulement si n est pair. En effet :

1. si n est pair alors n^2 est pair ;
2. si n^2 est pair alors nous avons déjà vu que n est pair.

Donc, par double implication, n^2 est pair si et seulement si n est pair.

Exercice 27. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer, par double implication, que $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

Définition 16 : Raisonnement par analyse-synthèse

Pour déterminer tous les objets mathématiques qui vérifient une certaine propriété, le **raisonnement par analyse-synthèse** se déroule en deux temps.

- L'**analyse** consiste à considérer les éléments qui vérifient la dite propriété et à obtenir des conditions nécessaires que doivent vérifier ces éléments.
- La **synthèse** consiste à considérer les éléments qui vérifient la ou les conditions nécessaires obtenus et à montrer qu'elles sont suffisantes ou non. Autrement dit, à déterminer, parmi les éléments obtenus, lesquels vérifient effectivement le problème de départ.

Exemple. Pour déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) - f(x-y) = 4xy,$$

on procède par analyse-synthèse.

- Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) - f(x-y) = 4xy$.
En particulier, pour $x = y \in \mathbb{R}, f(2x) - f(0) = 4x^2 = (2x)^2$.
Donc, pour $\frac{x}{2} \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + x^2$.
- Synthèse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = a + x^2$.
Alors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) - f(x-y) = a + (x+y)^2 - (a + (x-y)^2) = 4xy$.

En conclusion l'ensemble des fonctions f qui vérifient la propriété souhaitée sont de la forme $f : x \longmapsto a + x^2$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 28. Résoudre l'équation $\sqrt{x+6} = x$ d'inconnue réelle x .

Définition 17 : Raisonnement par disjonction de cas

Pour montrer qu'une assertion P est vraie, le **raisonnement par disjonction de cas** consiste à distinguer plusieurs cas et à montrer que, dans chaque cas, l'assertion P est vraie.

Exemple. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

En effet, procédons par disjonction de cas.

- Si $x \geq y$ alors $\max(x, y) = x$ et $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x = \max(x, y)$.

- Si $x < y$ alors $\max(x, y) = y$ et $\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + y - x}{2} = y = \max(x, y)$.

Exercice 29. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier.

Proposition 12 : Principe de récurrence

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier $n \geq n_0$. On suppose les deux propriétés suivantes.

- **Initialisation** : La propriété $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$ est vraie.

Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Démonstration admise.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{3^n}$.

En effet, nous pouvons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: « $u_n = \frac{2}{3^n}$ ».

- Initialisation : $u_0 = 2 = \frac{2}{3^0}$ donc la propriété $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $P(n)$ soit vraie.

Alors $u_n = \frac{2}{3^n}$.

Donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{3} = \frac{\frac{2}{3^n}}{3} = \frac{2}{3^n \times 3} = \frac{2}{3^{n+1}}$.

Donc la propriété $P(n+1)$ est également vraie.

Par conséquent, par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{3^n}$.

Exercice 30. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n - 1$ est un nombre pair.

Proposition 13 : Principe de récurrence double

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier $n \geq n_0$. On suppose les deux propriétés suivantes.

- **Double initialisation** : Les propriétés $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies.
- **Double hérédité** : Pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \wedge P(n+1) \implies P(n+2)$ est vraie.

Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Démonstration admise.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (cette suite est appelée la suite de Fibonacci). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

En effet nous pouvons montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: « $u_n \geq n$ ».

- Double initialisation : $u_0 = 1 \geq 0$ et $u_1 = 1 \geq 1$ donc les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les propriétés $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.

Alors $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n+1$.

Donc $u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \geq n + n + 1 \geq n$ car $n+1 \geq 0$.

Ainsi la propriété $P(n+2)$ est également vraie.

Par conséquent, par principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$. En particulier $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 31. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Montrer, par récurrence double, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

Proposition 14 : Principe de récurrence forte

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier $n \geq n_0$. On suppose les deux propriétés suivantes.

- **Initialisation** : La propriété $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité forte** : Pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n_0) \wedge P(n_0 + 1) \wedge \cdots \wedge P(n) \implies P(n + 1)$ est vraie.

Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Démonstration admise.

Exemple. Tout entier $n \geq 2$ admet une factorisation en nombre premiers.

En effet nous pouvons montrer par récurrence forte sur $n \geq 2$ la propriété $P(n)$: « n admet une factorisation en nombre premiers. ».

- Initialisation : $n = 2$ est une factorisation de 2 en nombres premiers car 2 est un nombre premier. Donc la propriété $P(2)$ est vraie.
- Hérédité forte : Soit $n \geq 2$ entier tel que les propriétés $P(2), P(3), \dots, P(n)$ soient vraies.
 - ★ Si $n + 1$ est premier alors $n + 1$ est directement une factorisation de $n + 1$ en nombres premiers.
 - ★ Si $n + 1$ n'est pas premier alors il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n + 1 = ab$ et $1 < a, b < n + 1$.
En particulier $2 \leq a, b \leq n$. Donc, par hypothèse de récurrence forte, a et b admettent des factorisations en nombre premiers.
Ainsi, par multiplication de ces factorisations, $n + 1 = ab$ admet une factorisation en nombres premiers.

Par conséquent, par principe de récurrence forte, tout entier $n \geq 2$ admet une factorisation en nombre premiers.

Exercice 32. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n + 1}$. Déterminer, par récurrence forte, l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6 Exercices

6.1 Assertions et équivalences

Exercice 33. Soient A et B deux assertions. Ecrire toutes les tables de vérité possibles d'une assertion C qui ne dépend que des assertions A et B (il y a seize tables en tout). Parmi ces tables, reconnaître celles qui ont été vues en cours.

Exercice 34. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- P : « $x^2 - 5x + 6 = 0$ »
- Q : « $(x - 2)(x - 3) = 0$ »
- R : « $x = 2$ ou $x = 3$ »

Exercice 35. Soit $x \in \mathbb{R}$. Parmi les phrases suivantes, lesquelles sont des assertions ? Parmi les assertions, lesquelles sont équivalentes ?

- A : « $(x - 1)(x + 2) = 0$ »
- B : « $x - 1$ »
- C : « $x = 1$ »
- D : « $x = -2$ »
- E : « 1 »
- F : « $x^2 = 1$ »
- G : « $x + 2$ »
- H : « $|x| = 1$ »
- I : « -2 »

6.2 Négations d'assertions

Exercice 36. On tire quatre cartes dans un jeu. Donner la négation des affirmations suivantes.

1. Les quatre cartes sont rouges.
2. Il n'y a aucune pique ou que des piques.
3. Il y a au moins deux cœurs.
4. Il y a au moins un pique et un cœur.

Exercice 37. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour chacune des assertions suivantes, écrire une proposition équivalente à sa négation en simplifiant au maximum.

1. $x \in [0, 1]$ et $x \neq \frac{1}{2}$.
2. $x < 0$ ou $x \geq 3$.
3. $(x - 1)(x + 2) > 0$ et $x \leq 5$.
4. $x^2 < 4$ et $(x - 1)^2 \geq 9$.
5. $x = 2$ et $x = 3$.
6. $x \in]-1, 2[$ ou $x \in [5, +\infty[$.
7. $|x| < 3$ et $x \neq 1$.
8. $(x^2 - 1 \leq 0)$ ou $(x - 2 > 0$ et $x \leq 5)$.

Exercice 38. On considère l'assertion A : « $((x \in [-2, 3]$ et $x \neq 0)$ ou $x > 5)$ et $x \neq 1$.

1. Écrire la négation de l'assertion A .
2. Simplifier cette négation pour obtenir une expression la plus concise possible.

6.3 Conjonctions et disjonctions

Exercice 39. Soient A et B deux assertions.

1. En utilisant les lois de Morgan, réécrire $A \vee B$ avec uniquement les opérateurs $\wedge$ et $\text{non}(\cdot)$.
2. De même, réécrire $A \wedge B$ avec uniquement les opérateurs $\vee$ et $\text{non}(\cdot)$.

Exercice 40. Donner un exemple de trois assertions A, B et C telles que les assertions $A \wedge (B \vee C)$ et $(A \wedge B) \vee C$ n'aient pas la même valeur logique.

Exercice 41. Soient A et B deux assertions. On définit la disjonction exclusive, notée $A \oplus B$ et signifiant le « ou exclusif », par la table de vérité suivante.

A	B	$A \oplus B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Autrement dit, l'assertion $A \oplus B$ est vraie si l'assertion A ou l'assertion B est vraie mais pas les deux simultanément.

1. Réécrire $A \oplus B$ à l'aide des opérateurs $\vee, \wedge$ et $\text{non}(\cdot)$.
2. Montrer que les assertions $\text{non}(A) \oplus \text{non}(B)$ et $A \oplus B$ ont la même valeur logique.
3. A quelle expression plus simple correspond $\text{non}(A \oplus B)$?
4. Montrer que les assertions $(A \oplus B) \oplus C$ et $A \oplus (B \oplus C)$ ont la même valeur logique.
5. Simplifier $(A \oplus B) \oplus B$.

6.4 Implications et équivalences

Exercice 42. Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \implies e^x \geq 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 \implies x \geq 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y \implies x^2 \geq y^2$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 \geq y^2 \iff x \geq y$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x = y \implies \cos(x) = \cos(y)$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \cos(x) = \cos(y) \implies x = y$
7. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, si m est pair alors m est un multiple de 6.
8. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, si m est un multiple de 6 alors m est pair.
9. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \cos(x) = \cos(y) \implies x^2 = y^2$
10. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2 \implies \cos(x) = \cos(y)$

Exercice 43. S'il pleut, Alice prend un parapluie. Bob ne prend jamais de parapluie quand il ne pleut pas et en prend toujours un quand il pleut. Que peut-on déduire dans chacun des cas suivants ?

1. Alice se promène avec un parapluie.
2. Alice se promène sans parapluie.
3. Bob se promène avec un parapluie.
4. Bob se promène sans parapluie.
5. Il ne pleut pas.
6. Il pleut.

Exercice 44. Soient A et B deux assertions. Simplifier les implications suivantes.

1. $A \implies \text{non}(A)$
2. $A \implies A \vee B$
3. $A \vee B \implies B$
4. $(A \implies B) \implies A$

6.5 Quantificateurs

Exercice 45. Soit $n \in \mathbb{N}$. Traduire avec des quantificateurs les propositions suivantes.

1. n est un multiple de 5.
2. n n'est pas un multiple de 3.

Exercice 46. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction s'annule au moins une fois.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f est constante.
4. La fonction f est paire.
5. La fonction f n'est pas impaire.
6. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
7. L'équation $f(x) = 2$ admet au moins deux solutions distinctes.
8. La fonction f n'est pas majorée.

Exercice 47. Ecrire avec des quantificateurs et des connecteurs les assertions suivantes.

1. Il existe un rationnel entre $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
2. Pour tout entier naturel n , il existe un entier supérieur à n .
3. Il existe un entier naturel supérieur à tous les autres.

4. Si la somme de deux entiers naturels est nulle alors ces deux entiers sont nuls.
 Dans chaque cas, déterminer si l'assertion est vraie ou fausse. Le démontrer.

Exercice 48. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donner la négation de chacune des assertions suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$
3. $\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \geq A, f(x) > M$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \implies x \leq 0$
5. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

6.6 Raisonnement direct

Exercice 49. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, A > e^{-n}$
2. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, A > e^{-n}$

Exercice 50. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 51. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère les assertions suivantes.

- $P : \ll \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \gg$
- $Q : \ll \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \gg$
- $R : \ll (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0) \gg$

Parmi les implications suivantes, lesquelles sont correctes ?

1. $P \implies Q$
2. $Q \implies P$
3. $Q \implies R$
4. $\text{non}(R) \implies Q$
5. $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$
6. $\text{non}(P) \implies \text{non}(R)$

6.7 Raisonnement par contraposée

Exercice 52. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes.

1. $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$
2. $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$

Exercice 53. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$a^2 + b^2 < 1 \implies |a - b| < 1.$$

Exercice 54. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $n^2 + n$ est impair alors n n'est pas un entier.
2. Que peut-on en conclure ?

6.8 Raisonnement par l'absurde

Exercice 55. L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

1. $\forall r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}, r = e^s - 1$
2. $\exists r \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, r = e^s - 1$

Exercice 56. Soient $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 + n_3 = 30$. Montrer qu'au moins un de ces entiers est supérieur à 10.

Exercice 57. Montrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 58. Montrer qu'il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.

6.9 Raisonnement par équivalences successives

Exercice 59. Résoudre l'équation $x + \sqrt{x+1} = 5$ d'inconnue réelle $x \geq -1$.

Exercice 60. Résoudre l'inéquation $|x-2| \leq |x+1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 61. Résoudre l'équation $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-2} = 3$ d'inconnue réelle $x \geq 2$.

6.10 Raisonnement par double implication

Exercice 62.

1. Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.
2. Montrer que si le produit de deux entiers est impair alors ces deux entiers sont impairs.
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 63. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $|x| + |y| = \max(|x+y|, |x-y|)$ par disjonction de cas.
2. En déduire que $|x| + |y| < 1$ si et seulement si $|x+y| < 1$ et $|x-y| < 1$.

Exercice 64. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$|x-1| + |x+1| = 2 \iff x \in [-1, 1].$$

6.11 Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 65. Résoudre l'équation $\frac{t^2+2}{t^2-2} = \frac{t-1}{t+1}$ d'inconnue réelle t .

Exercice 66. L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1+x.$$

1. Dans cette question, on considère une fonction f solution.
 - (a) Déterminer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
 - (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$.
 - (c) En déduire une expression de la fonction f .
2. Conclure.

Exercice 67. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 68. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs entières positives vérifiant :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, u_{m+n} = u_m + u_n.$$

6.12 Raisonnement par disjonction de cas

Exercice 69. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'entier $(n+2)(3n-1)$ est pair.

Exercice 70. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 71. Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre, par disjonction de cas, l'inéquation $|x^2 - 4x + 3| \leq |x-1|$ d'inconnue réelle x .

6.13 Raisonnements par récurrence

Exercice 72. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 3^n - 1.$$

Exercice 73. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -2v_n + 6$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-2)^n(v_0 - 2) + 2.$$

En particulier, pour quel v_0 la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante ?

Exercice 74. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 75. Montrer que, pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Exercice 76. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 77. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq 2^{n-1}$.

Exercice 78. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « 3 divise 2^n ».

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'implication $P(n) \implies P(n+1)$ est vraie.
2. Que peut-on dire de la propriété $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

6.14 Raisonnements par récurrence double

Exercice 79. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3 - 3^n}{2}$.

Exercice 80. On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est strictement positif.

Exercice 81. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

6.15 Raisonnements par récurrence forte

Exercice 82. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 83. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{2}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3n$.

Exercice 84. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est la partie entière de la fraction $\frac{n}{2}$.

1. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3n$.

Table des matières

1	Propositions, équivalences et négations	2
2	Conjonctions et disjonctions	3
3	Implications	6
4	Quantificateurs	9
5	Différents modes de raisonnement	10
6	Exercices	14

Programme officiel de ce chapitre

Contenus	Capacités et commentaires
Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction de cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.