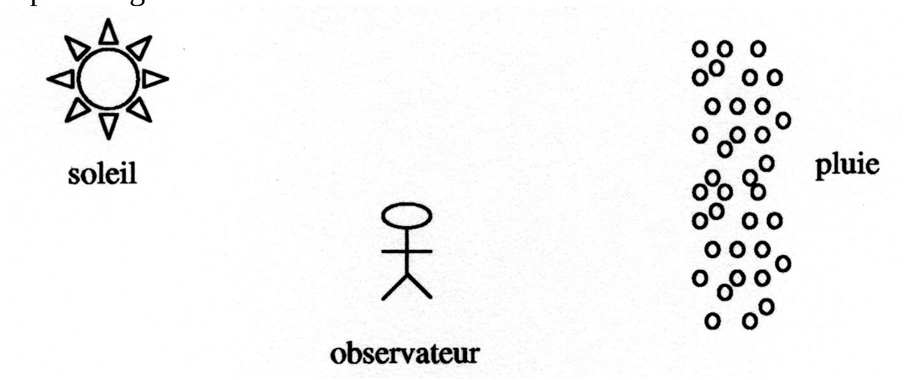
L'objectif de ce problème est d'expliquer le phénomène d'arc-en-ciel qui a lieu dans des conditions grossièrement décrites par la figure 1 ci-dessous.

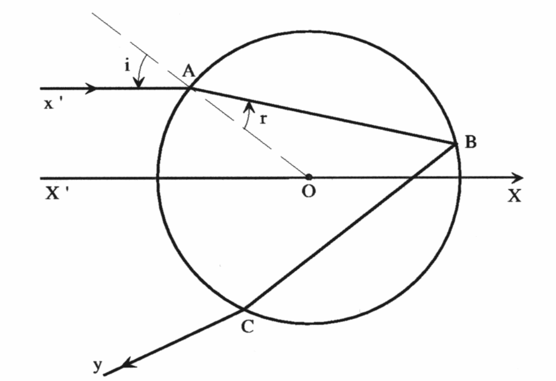
Figure 1



1. Dans quelle direction regarde l'observateur pour apercevoir l'arc-en-ciel?

Dans un premier temps, on s'intéresse au parcours des rayons du soleil dans une goutte d'eau modélisée par une sphère de centre O et de rayon R, qu'on supposera immobile dans l'air. Cette goutte est éclairée par un faisceau de lumière parallèle dont un rayon x'A atteint la sphère en A où il se réfracte. On pose $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Ax'})=i$ et $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})=r$, les angles d'incidence et de réfraction (figure 2). Soit B le point où le rayon réfracté rencontre la sphère. En B on ne considère que le rayon réfléchi. Le rayon réfléchi en B rencontre de nouveau la sphère en C où il se réfracte selon Cy. On note $\alpha=(\overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{Cy})$.

Figure 2



On note n l'indice de réfraction de la goutte d'eau et on prendra l'indice de l'air égal à 1,000.
Dans un premier temps, on suppose que la lumière incidente est monochromatique de longueur d'onde λ.

2. Établir une approximation portant sur R et λ à partir de laquelle on peut négliger le phénomène de diffraction et ainsi assimiler la lumière traversant la goutte à des rayons lumineux (hypothèse de l'optique géométrique). Cette approximation vous semble-t-elle valable dans le cas présent?

<u>3. Étude quantitative avec n constant</u>

Le modèle étant supposé pertinent, on se propose maintenant de quantifier le phénomène d'arc-en-ciel. On commence par supposer n constant et on cherche à analyser les conséquences des variations de l'angle d'incidence i.

3.1. Peut-il y avoir réflexion totale en B? Préciser alors à quelle condition sur r.

3.2. Montrer que α = 4 r – 2 i

3.3. Établir l'expression de la dérivée $\frac{d\alpha}{di}$ **(dérivée de α par rapport à i) en fonction de** $\frac{dr}{di}$ **.**

3.4. En déduire la valeur numérique de $\frac{dr}{di}$ **pour laquelle α est extremum. On notera cette valeur** $\left(\frac{dr}{di}\right)_E$

Dans la suite du problème, on admettra que l'intensité lumineuse réfléchie par la goutte est maximale lorsque α passe par son extremum.

3.5. A partir des lois de Descartes, montrer que $\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r}$

3.6. Établir l'expression de $\cos i_E$ **en fonction de n uniquement ;** i_E **est la valeur de i pour laquelle α est extremum.**

3.7. Établir l'expression de $\cos r_E$ **en fonction de n uniquement ;** r_E **est la valeur de r pour laquelle α est extremum.**

3.8. En déduire l'expression de l'extremum de α noté α_E **en fonction de n.**

<u>4. Rôle de la dispersion</u>

En fait l'indice de réfraction n de l'eau dépend de la longueur d'onde de la lumière incidente (phénomène de dispersion). Dans le rouge, $n_{rouge} = 1{,}331$ et dans le violet $n_{violet} = 1{,}337$.

4.1. Indiquer la position des longueurs d'onde du rouge et du violet dans le spectre visible.

4.2. Donner un autre exemple de milieu dispersif.

4.3. La partie extérieure d'un arc-en-ciel est-elle rouge ou violette ? On ne demande pas de calcul numérique pour cette question

4.4. Calculer les valeurs numériques de α_E **lorsque** $n = n_{rouge}$ **et** $n = n_{violet}$. **Cela est-il cohérent avec la question 4.3**

4.5. En raisonnant sur les symétries du problème, expliquer la forme en arc de cercle d'un arc-en-ciel. Faire un schéma s'inspirant de la figure 1 décrivant le phénomène d'arc-en-ciel.