

PROGRAMME DE COLLES N° 14

Semaine du 15/01/2024 au 19/01/2024

👉 Applications, suites 👈

⚠ Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 11. Applications —

Tout le chapitre.

1 Applications, restriction, prolongement	2.3 Bijektivité
1.1 Généralités	3 Image directe, image réciproque
1.2 Famille indexée par un ensemble	3.1 Image directe
1.3 Restriction, prolongement	3.2 Image réciproque
1.4 Opérations algébriques dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$	4 Applications et dénombrement
1.5 Fonction identité et composition d'applications	4.1 Définition
1.6 Fonction indicatrice d'un ensemble	4.2 Cardinal des applications de E dans F , des parties de E
2 Injection, surjection, bijection	4.3 Cardinal et injectivité, surjectivité
2.1 Injectivité	4.4 Permutations
2.2 Surjectivité	

— Chapitre 12. Généralités sur les suites numériques —

Tout le chapitre.

1 Généralités et vocabulaire sur les suites	2.1 Suites stationnaires
1.1 Modes de définition	2.2 Suites périodiques
1.2 Représentation graphique d'une suite réelle	2.3 Suites arithmétiques
1.3 Opérations	2.4 Suites géométriques
1.4 Variations des suites réelles	2.5 Suites arithmético-géométriques
1.5 Suites bornées	2.6 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants
2 Exemples de suites récurrentes	

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 11. Exercice 3 pour $f : E \rightarrow F$ une application et deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$, montrer l'égalité $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$.
- Chapitre 11. Théorème 2 : pour tout ensemble E , l'application $\mathcal{P}(E) \rightarrow \{0; 1\}^E, A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection et conséquence sur le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
- Chapitre 12. Proposition 2 et exemple 5.3 : variations des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ items (iii) quand f est croissante et (iv) quand f est décroissante; exemple de $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ avec $u_0 = 0$ puis $u_0 = 3$ (on fera les représentations graphiques).
- Chapitre 12. Exemples 14 et 16 : déterminer u_n le nombre de façons de recouvrir un damier de dimensions $2 \times n$ avec des dominos de taille 2×1 (établir la formule de récurrence et la résoudre).

À venir : bornes d'une partie de \mathbb{R} , limite d'une suite.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x+1}$.

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer $\int_0^1 te^t dt$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples.**

Exemple : décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \neq \pm 1$.

- **Équations différentielles.**

Exemple résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemple : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.