

PROGRAMME DE COLLES N° 14

Semaine du 15/01/2024 au 19/01/2024

👉 *Applications, suites* 👈

⚠ Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 11. Applications —

Tout le chapitre.

1 Applications, restriction, prolongement

- 1.1 Généralités
- 1.2 Famille indexée par un ensemble
- 1.3 Restriction, prolongement
- 1.4 Opérations algébriques dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$
- 1.5 Fonction identité et composition d'applications
- 1.6 Fonction indicatrice d'un ensemble

2 Injection, surjection, bijection

- 2.1 Injectivité
- 2.2 Surjectivité

- 2.3 Bijektivité

3 Image directe, image réciproque

- 3.1 Image directe
- 3.2 Image réciproque

4 Applications et dénombrement

- 4.1 Définition
- 4.2 Cardinal des applications de E dans F , des parties de E
- 4.3 Cardinal et injectivité, surjectivité
- 4.4 Permutations

— Chapitre 12. Généralités sur les suites numériques —

Tout le chapitre.

1 Généralités et vocabulaire sur les suites

- 1.1 Modes de définition
- 1.2 Représentation graphique d'une suite réelle
- 1.3 Opérations
- 1.4 Variations des suites réelles
- 1.5 Suites bornées

2 Exemples de suites récurrentes

- 2.1 Suites stationnaires
- 2.2 Suites périodiques
- 2.3 Suites arithmétiques
- 2.4 Suites géométriques
- 2.5 Suites arithmético-géométriques
- 2.6 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 11. Exercice 3 pour $f : E \rightarrow F$ une application et deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$, montrer l'égalité $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$.
- Chapitre 11. Théorème 2 : pour tout ensemble E , l'application $\mathcal{P}(E) \rightarrow \{0; 1\}^E, A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection et conséquence sur le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
- Chapitre 12. Proposition 2 et exemple 5.3 : variations des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ items (iii) quand f est croissante et (iv) quand f est décroissante; exemple de $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ avec $u_0 = 0$ puis $u_0 = 3$ (on fera les représentations graphiques).
- Chapitre 12. Exemples 14 et 16 : déterminer u_n le nombre de façons de recouvrir un damier de dimensions $2 \times n$ avec des dominos de taille 2×1 (établir la formule de récurrence et la résoudre).

À venir : bornes d'une partie de \mathbb{R} , limite d'une suite.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x+1}$.

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer $\int_0^1 te^t dt$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples.**

Exemple : décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \neq \pm 1$.

- **Équations différentielles.**

Exemple résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemple : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.