Programme de colles n° 14

Semaine du 15/01/2024 au 19/01/2024

☞ ***Applications, suites*** ☜

Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 11. Applications —

Tout le chapitre.

— Chapitre 12. Généralités sur les suites numériques —

Tout le chapitre.

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 11. Exercice 3 pour $f : E \to F$ une application et deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$, montrer l'égalité $f(A) \cap B = f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$.
- Chapitre 11. Théorème 2 : pour tout ensemble E, l'application $\mathcal{P}(E) \to \{0;1\}^E, A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection et conséquence sur le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
- Chapitre 12. Proposition 2 et exemple 5.3 : variations des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ items (iii) quand f est croissante et (iv) quand f est décroissante ; exemple de $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ avec $u_0 = 0$ puis $u_0 = 3$ (on fera les représentations graphiques).
- Chapitre 12. Exemples 14 et 16 : déterminer u_n le nombre de façons de recouvrir un damier de dimensions $2 \times n$ avec des dominos de taille 2×1 (établir la formule de récurrence et la résoudre).

À venir : bornes d'une partie de $\mathbb{R}$, limite d'une suite.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**
  Exemples : formule $\cos(2a)$, *résolution de* $\sin a = \sin b$.
- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).
  Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - \mathrm{i}$, *résolution de* $z^n = 1$ *dans* $\mathbb{C}$.
- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  Exemples : donner la formule pour $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$, *calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.
- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  Exemples : définir Arctan, *simplifier* $\operatorname{Arccos}(\cos(7))$, *théorème de dérivation de* $g \circ f$, *dérivée de* $x \longmapsto f(-x)$, *donner une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{1}{2x+1}$.
- **IPP ou changement de variable simple.**
  Exemples : calculer $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$, *calculer* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ *en posant* $t = \sin x$.
- **Décomposition en éléments simples.**
  Exemple : décomposer $\dfrac{1}{1-x^2}$ *pour tout* $x \neq \pm 1$.
- **Équations différentielles.**
  Exemple résoudre $xy' + y = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  Exemple : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 = 1$, *expression de la suite vérifiant* $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $v_0 = v_1 = 1$.