

# PROGRAMME DE COLLES N° 15

Semaine du 22/01/2024 au 26/01/2024

👉 **Bornes d'une partie de  $\mathbb{R}$ , limite d'une suite** 👈

## ⚠ Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

## — Chapitre 13 : bornes d'une partie de $\mathbb{R}$ —

### 1 Définitions et existence des bornes

- 1.1 Motivation, définitions, cas simples où les bornes sont atteintes . . . . .
- 1.2 Bornes et inégalités, exemples d'opérations . . . . .

### 2 Caractérisations des bornes : epsilonesque et séquentielle

### 3 Application aux intervalles

## — Chapitre 14 : limite d'une suite numérique —

### 1 Limite d'une suite réelle

- 1.1 Propriété vraie à partir d'un certain rang . . . . .
- 1.2 Limite finie . . . . .
- 1.3 Limite infinie . . . . .
- 1.4 Suites convergentes, divergentes . . . . .
- 1.5 Propriétés de la limite . . . . .
- 1.6 Suites extraites . . . . .

- 1.7 Opérations sur les limites, composition avec des fonctions . . . . .
- 1.8 Limites usuelles et croissances comparées . . . . .

### 2 Théorèmes d'existence de limite

- 2.1 Théorèmes d'encadrement, majoration, minoration . . . . .
- 2.2 Théorème de la limite monotone . . . . .
- 2.3 Suites adjacentes . . . . .

### Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 13. Exemples 4.4 : si  $A \subset \mathbb{R}$  non vide et majorée et  $\lambda > 0$ , alors  $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ .
- Chapitre 14. Exemple 9.3 :  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Expliquer en quoi cela donne une forme indéterminée.
- Chapitre 14. Théorème 1 (de la limite monotone), cas croissant.

À venir : Limite d'une suite (fn), matrices.

## Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule  $\cos(2a)$ , résolution de  $\sin a = \sin b$ .

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de  $\sqrt{3} - i$ , résolution de  $z^n = 1$  dans  $\mathbb{C}$ .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour  $\sum_{k=1}^n q^k$ , calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ .

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir  $\text{Arctan}$ , simplifier  $\text{Arccos}(\cos(7))$ , théorème de dérivation de  $g \circ f$ , dérivée de  $x \mapsto f(-x)$ , donner une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{2x+1}$ .

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer  $\int_0^1 te^t dt$ , calculer  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$  en posant  $t = \sin x$ .

- **Décomposition en éléments simples.**

Exemple : décomposer  $\frac{1}{1-x^2}$  pour tout  $x \neq \pm 1$ .

- **Équations différentielles.**

Exemple résoudre  $xy' + y = x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemple : expression de la suite vérifiant  $u_{n+1} = 2u_n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_0 = 1$ , expression de la suite vérifiant  $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $v_0 = v_1 = 1$ .