Programme de colles n° 16

Semaine du 29/01/2024 au 02/02/2024

☞ ***Limite d'une suite*** ☜

⚠ **Nouveau format de la colle :**

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 14 : limite d'une suite numérique —

Tout le chapitre.

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 14. Exemple 9.3 : $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Expliquer en quoi cela donne une forme indéterminée.
- Chapitre 14. Théorème 1 (de la limite monotone), cas croissant.
- Chapitre 14. Exemple 18 : calculer les bornes de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x)\cos(x)$ en précisant si elles sont atteintes.
- Chapitre 14. Proposition 13 : pour $a \in \mathbb{C}$, la suite (a^n) converge si et seulement si $|a| < 1$ ou $a = 1$.

<u>À venir : Matrices.</u>

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**
  Exemples : formule $\cos(2a)$, *résolution de* $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).
  Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - \mathrm{i}$, *résolution de* $z^n = 1$ *dans* $\mathbb{C}$.

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^{n} q^k$, *calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  Exemples : définir Arctan, *simplifier* $\operatorname{Arccos}(\cos(7))$, *théorème de dérivation de* $g \circ f$, *dérivée de* $x \longmapsto f(-x)$, *donner une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{1}{2x+1}$.

- **IPP ou changement de variable simple.**
  Exemples : calculer $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$, *calculer* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, \mathrm{d}t$ *en posant* $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples.**
  Exemple : décomposer $\dfrac{1}{1-x^2}$ *pour tout* $x \neq \pm 1$.

- **Équations différentielles.**
  Exemple résoudre $xy' + y = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  Exemple : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 = 1$, *expression de la suite vérifiant* $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $v_0 = v_1 = 1$.