

PROGRAMME DE COLLES N° 16

Semaine du 29/01/2024 au 02/02/2024

☞ *Limite d'une suite* ☞

⚠ Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 14 : limite d'une suite numérique —

Tout le chapitre.

1 Limite d'une suite réelle

- 1.1 Propriété vraie à partir d'un certain rang
- 1.2 Limite finie
- 1.3 Limite infinie
- 1.4 Suites convergentes, divergentes
- 1.5 Propriétés de la limite
- 1.6 Suites extraites
- 1.7 Opérations sur les limites, composition avec des fonctions
- 1.8 Limites usuelles et croissances comparées

2 Théorèmes d'existence de limite

- 2.1 Théorèmes d'encadrement, majoration, minoration
- 2.2 Théorème de la limite monotone
- 2.3 Suites adjacentes

3 Rappels et compléments sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

- 3.1 Rappels, limites possibles
- 3.2 Exemples d'étude

4 Limites, bornes et densité

- 4.1 Caractérisation séquentielle des bornes
- 4.2 Densité des décimaux, des rationnels, et des irrationnels dans \mathbb{R}

5 Brève extension aux suites complexes

- 5.1 Définition
- 5.2 Propriétés des suites complexes convergentes

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 14. Exemple 9.3 : $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Expliquer en quoi cela donne une forme indéterminée.
- Chapitre 14. Théorème 1 (de la limite monotone), cas croissant.
- Chapitre 14. Exemple 18 : calculer les bornes de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \text{Arctan}(x) \cos(x)$ en précisant si elles sont atteintes.
- Chapitre 14. Proposition 13 : pour $a \in \mathbb{C}$, la suite (a^n) converge si et seulement si $|a| < 1$ ou $a = 1$.

À venir : Matrices.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x+1}$.

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer $\int_0^1 te^t dt$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples.**

Exemple : décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \neq \pm 1$.

- **Équations différentielles.**

Exemple résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemple : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.