

PROGRAMME DE COLLES N° 17

Semaine du 05/02/2024 au 09/02/2024

👉 **Matrices** 👈

⚠ Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 15 — Matrices —

Tout le chapitre.

1 Matrices et opérations algébriques

- 1.1 L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices rectangulaires
- 1.2 Combinaisons linéaires de matrices
- 1.3 Produits de matrices
- 1.4 Propriétés de la multiplication matricielle
- 1.5 Transposition
- 1.6 Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

2 L'algèbre des matrices carrées

- 2.1 Puissances de matrices
- 2.2 Matrices nilpotentes
- 2.3 Matrices diagonales, effet de la multiplication par une matrice diagonale
- 2.4 Matrices triangulaires
- 2.5 Matrices symétriques, antisymétriques
- 2.6 Trace d'une matrice carrée

3 Matrices et systèmes linéaires

- 3.1 Écriture matricielle d'un système linéaire
- 3.2 Structure des solutions
- 3.3 Opérations élémentaires et multiplication matricielle

4 Inversibilité, groupe linéaire

- 4.1 Généralités
- 4.2 Inverse et opérations
- 4.3 Inversibilité de certains types de matrices
- 4.4 Inversibilité et systèmes linéaires
- 4.5 Calcul effectif de l'inverse
- 4.6 Application aux matrices triangulaires

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Proposition 11. L'ensemble $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures est stable par combinaisons linéaires et produit, avec formule pour les coefficients diagonaux du produit.
- Proposition 13. Définition et propriétés de la trace.
- Proposition-définition 2 et exercice 13. Montrer l'unicité de l'inverse d'une matrice en cas d'existence. Calcul de J^2 , inversibilité et inverse de $J - I_n$ où $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a tous ses coefficients égaux à 1.

À venir : Matrices, limites et continuité.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x+1}$.

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer $\int_0^1 te^t dt$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples.**

Exemple : décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \neq \pm 1$.

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites.**

Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \frac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$, adjacence des suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

- **Matrices.**

Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.