Programme de colles n° 17

Semaine du 05/02/2024 au 09/02/2024

☞ ***Matrices*** ☜

⚠ **Nouveau format de la colle :**

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 15 — Matrices —

Tout le chapitre.

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Proposition 11. L'ensemble $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures est stable par combinaisons linéaires et produit, avec formule pour les coefficients diagonaux du produit.
- Proposition 13. Définition et propriétés de la trace.
- Proposition-définition 2 et exercice 13. Montrer l'unicité de l'inverse d'une matrice en cas d'existence. Calcul de J^2, inversibilité et inverse de $J - \mathrm{I}_n$ où $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a tous ses coefficients égaux à 1.

À venir : Matrices, limites et continuité.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**
  Exemples : formule $\cos(2a)$*, résolution de* $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).
  Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - \mathrm{i}$*, résolution de* $z^n = 1$ *dans* $\mathbb{C}$.

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  Exemples : donner la formule pour $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$*, calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  Exemples : définir Arctan*, simplifier* $\operatorname{Arccos}(\cos(7))$*, théorème de dérivation de* $g \circ f$*, dérivée de* $x \longmapsto f(-x)$*, donner une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{1}{2x+1}$.

- **IPP ou changement de variable simple.**
  Exemples : calculer $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$*, calculer* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ *en posant* $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples.**
  Exemple : décomposer $\dfrac{1}{1-x^2}$ *pour tout* $x \neq \pm 1$.

- **Équations différentielles.**
  Exemple : résoudre $xy' + y = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 = 1$*, expression de la suite vérifiant* $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites.**
  Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $\lim \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$*, adjacence des suites définies par* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *et* $T_n = S_n + \dfrac{1}{n}$.

- **Matrices.**
  Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*, de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, calcul de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$*, de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.