

PROGRAMME DE COLLES N° 18

Semaine du 12/02/2024 au 16/02/2024

☞ *Matrices, limites et continuité* ☞

⚠ Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 15 — Matrices —

Révisions du programme précédent. Le colleur posera une question de cours ou un petit exercice sur ce chapitre.

— Chapitre 16 — Limites et continuité d'une fonction —

1 Limite d'une fonction

- 1.1 Point adhérent, voisinage
- 1.2 Les 9 définitions de limite
- 1.3 Unicité de la limite
- 1.4 Limite à droite, à gauche, extension de la notion
- 1.5 Caractérisation séquentielle de la limite
- 1.6 Opérations, limites usuelles
- 1.7 Limites et inégalités
- 1.8 Théorèmes d'existence de limite

2 Continuité locale d'une fonction

- 2.1 Continuité en un point
- 2.2 Prolongement par continuité

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 15. Proposition 11. L'ensemble $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures est stable par combinaisons linéaires et produit, avec formule pour les coefficients diagonaux du produit.
- Chapitre 16. Proposition 3, 2^e point : si f admet une limite en un point où elle est définie, cette limite vaut nécessairement sa valeur en ce point.
- Chapitre 16. Proposition 5, sens $(ii) \implies (i)$: si $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ pour toute suite (x_n) de limite a , alors $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$. (On se contentera du cas $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$). Application au cas de la fonction cos en $+\infty$.

À venir : Limites et continuité (suite et fin).

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$.

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer $\int_0^1 te^t dt$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples.**

Exemple : décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \neq \pm 1$.

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**

Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \frac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$, adjacence des suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

- **Matrices.**

Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.