

PROGRAMME DE COLLES N° 19

Semaine du 19/02/2024 au 23/02/2024

☞ *Limites et continuité, dérivabilité* ☞

⚠ Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 16 — Limites et continuité d'une fonction —

1 Limite d'une fonction	2.1 Continuité en un point
1.1 Point adhérent, voisinage	2.2 Prolongement par continuité
1.2 Les 9 définitions de limite	2.3 Opérations, compositions
1.3 Unicité de la limite	3 Continuité sur un intervalle, propriétés globales
1.4 Limite à droite, à gauche, extension de la notion	3.1 Définition, opérations
1.5 Caractérisation séquentielle de la limite	3.2 Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences, image continue d'un intervalle
1.6 Opérations, limites usuelles	3.3 Théorème des bornes atteintes
1.7 Limites et inégalités	4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes
1.8 Théorèmes d'existence de limite	
2 Continuité locale d'une fonction	

— Chapitre 17 — Dérivabilité —

Le début seulement.

1 Dérivabilité en un point
1.1 Définition, point de vue graphique
1.2 Interprétation graphique, approximation affine
1.3 Opérations sur les fonctions dérivables en un point
1.4 Dérivée à gauche/à droite
2 Dérivabilité étendue
2.1 Dérivabilité sur un intervalle et classe $\mathcal{D}(I)$

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 16. Proposition 3, 2^e point : si f admet une limite en un point où elle est définie, cette limite vaut nécessairement sa valeur en ce point.
- Chapitre 16. Proposition 5, sens $(ii) \implies (i)$: si $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ pour toute suite (x_n) de limite a , alors $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$. (On se contentera du cas $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$). Application au cas de la fonction cos en $+\infty$.
- Chapitre 17. Proposition-définition 1 : la dérivabilité en a est équivalente à l'existence d'un DL à l'ordre 1 en a .
- Chapitre 17. Proposition 3 : dérivabilité en un point de la réciproque d'une fonction bijective (en admettant la continuité).

À venir : dérivabilité (suite et fin).

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer $\int_0^1 te^t dt$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples.**

Exemple : décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \neq \pm 1$.

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**

Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \frac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$, adjacence des suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

- **Matrices.**

Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.