Programme de colles n° 20

Semaine du 11/03/2024 au 15/03/2024

☞ ***Dérivabilité*** ☜

Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 16 — Limites et continuité d'une fonction —

Révisions du programme précédent.

— Chapitre 17 — Dérivabilité —

Tout le chapitre.

1 Dérivabilité en un point
1.1 Définition, point de vue graphique
1.2 Interprétation graphique, approximation affine
1.3 Opérations sur les fonctions dérivables en un point
1.4 Dérivée à gauche/à droite

2 Dérivabilité étendue
2.1 Dérivabilité sur un intervalle et classe $\mathscr{D}(I)$
2.2 Dérivées d'ordre supérieur
2.3 Opérations dans les classes $\mathscr{C}^k(I)$ ou $\mathscr{D}^k(I)$

3 Propriétés locales et globales des fonctions dérivables
3.1 Extremum local et point critique
3.2 Théorème de Rolle
3.3 Égalité des accroissements finis et applications : variations et signe de la dérivée, théorème de la limite de la dérivée, version $\mathscr{C}^1$ de ce même théorème
3.4 Inégalité des accroissements finis

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 17. Proposition-définition 1 : la dérivabilité en a est équivalente à l'existence d'un DL à l'ordre 1 en a.
- Chapitre 17. Proposition 3 : dérivabilité en un point de la réciproque d'une fonction bijective (en admettant la continuité).
- Chapitre 17. Produit de 2 fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, formule de Leibniz.
- Chapitre 17. Proposition 9 : théorème de la limite de la dérivée.

À venir : arithmétique dans $\mathbb{Z}$, polynômes.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**
  Exemples : formule $\cos(2a)$, *résolution de* $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).
  Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - \mathrm{i}$, *résolution de* $z^n = 1$ *dans* $\mathbb{C}$.

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^{n} q^k$, *calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  Exemples : définir Arctan, *simplifier* $\operatorname{Arccos}(\cos(7))$, *théorème de dérivation de* $g \circ f$, *dérivée de* $x \longmapsto f(-x)$, *donner une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{x}{2x+1}$, *ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de* $x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

- **IPP ou changement de variable simple.**
  Exemples : calculer $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$, *calculer* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, \mathrm{d}t$ *en posant* $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples.**
  Exemple : décomposer $\dfrac{1}{1-x^2}$ *pour tout* $x \neq \pm 1$.

- **Équations différentielles.**
  Exemple : résoudre $xy' + y = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 = 1$, *expression de la suite vérifiant* $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**
  Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $\lim \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, *adjacence des suites définies par* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \dfrac{1}{n}$.

- **Matrices.**
  Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *calcul de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, *de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.
  Exemples : dérivée n*-ième de* $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$, $|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \leqslant |x - y|$ *pour tous* x,y, $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ *pour tout* $x > 0$.