

# PROGRAMME DE COLLES N° 22

Semaine du 25/03/2024 au 29/03/2024

👉 *Polynômes* 👈

## ⚠ Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

## — Chapitre 19 — Polynômes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ —

Sans d'Alembert-Gauss, ni la description des irréductibles de  $\mathbb{K}[X]$  cette semaine.

*Cette semaine, un des automatismes de calculs sera une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à pôles simples n'annulant pas le numérateur et avec une partie entière non nulle.*

### 1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

- 1.1 Polynôme, degré . . . . .
- 1.2 Combinaisons linéaires, produit, puissances, composition . . . . .
- 1.3 Évaluation en un scalaire, fonction polynomiale associée, algorithme de HORNER pour l'évaluation polynomiale . . . . .
- 1.4 Dérivation de polynômes . . . . .

### 2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

- 2.1 Factorisation . . . . .
- 2.2 Division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$  . . . . .

### 3 Racines et factorisation

- 3.1 Racine, factorisation par  $X - \alpha$  . . . . .
- 3.2 Racines multiples . . . . .
- 3.3 Application au nombre de racines . . . . .
- 3.4 Polynômes scindés, relations coefficients-racines, et éléments simples . . . . .

### Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 19. Montrer que  $(PQ)' = P'Q + PQ'$  pour tous  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ .
- Chapitre 19. Formule de Vandermonde :  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad \forall n \in \llbracket 0; p+q \rrbracket \quad \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$ .
- Chapitre 19. Théorème 2 : formule de Taylor pour les polynômes.
- Chapitre 19. Théorème 4 : reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - \alpha$  et équivalence  $P(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha) \mid P$ .

À venir : polynômes, comparaisons asymptotiques.

## Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.  
Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule  $\cos(2a)$ , résolution de  $\sin a = \sin b$ .

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de  $\sqrt{3} - i$ , résolution de  $z^n = 1$  dans  $\mathbb{C}$ .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour  $\sum_{k=1}^n q^k$ , calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ .

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir  $\text{Arctan}$ , simplifier  $\text{Arccos}(\cos(7))$ , théorème de dérivation de  $g \circ f$ , dérivée de  $x \mapsto f(-x)$ , donner une primitive de  $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$ , ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de  $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer  $\int_0^1 te^t dt$ , calculer  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$  en posant  $t = \sin x$ .

- **Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à pôles simples.**

Exemple : décomposer  $\frac{1}{1-x^2}$  pour tout  $x \neq \pm 1$ ,  $\frac{x^4+1}{x^3-x}$  pour  $x \neq 0; \pm 1$ .

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre  $xy' + y = x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant  $u_{n+1} = 2u_n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_0 = 1$ , expression de la suite vérifiant  $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $v_0 = v_1 = 1$ .

- **Limites de suites.**

Exemples :  $\lim \sqrt[n]{n}$ ,  $\lim \frac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$ ,  $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ,  $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$ , adjacence des suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

- **Matrices.**

Exemples : puissances de  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , calcul de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ , de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$ .

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.

Exemples : dérivée  $n$ -ième de  $x \mapsto x^2 e^{-x}$ ,  $|\text{Arctan } x - \text{Arctan } y| \leq |x - y|$  pour tous  $x, y$ ,  $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$  pour tout  $x > 0$ .