

PROGRAMME DE COLLES N° 23

Semaine du 02/04/2024 au 05/04/2024

👉 **Polynômes, comparaisons asymptotiques** 👈

⚠ Nouveau format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 19 — Polynômes sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} —

Tout le chapitre.

Cette semaine, un des automatismes de calculs sera une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à pôles simples n'annulant pas le numérateur et avec une partie entière non nulle.

- | | |
|---|--|
| <p>1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K}</p> <p>1.1 Polynôme, degré</p> <p>1.2 Combinaisons linéaires, produit, puissances, composition</p> <p>1.3 Évaluation en un scalaire, fonction polynomiale associée, algorithme de HORNER pour l'évaluation polynomiale</p> <p>1.4 Dérivation de polynômes</p> <p>2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$</p> <p>2.1 Factorisation</p> | <p>2.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$</p> <p>3 Racines et factorisation</p> <p>3.1 Racine, factorisation par $X - \alpha$</p> <p>3.2 Racines multiples</p> <p>3.3 Application au nombre de racines</p> <p>3.4 Polynômes scindés, relations coefficients-racines, et éléments simples</p> <p>3.5 Théorème de D'Alembert-Gauss et factorisation dans $\mathbb{C}[X]$</p> <p>3.6 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$</p> |
|---|--|

— Chapitre 20 — Comparaisons asymptotiques —

- | | |
|--|---|
| <p>1 Domination, négligeabilité</p> <p>1.1 Domination</p> <p>1.2 Négligeabilité</p> <p>1.3 Réécriture des croissances comparées avec o</p> <p>1.4 Opérations entre o ou entre O</p> | <p>2 Équivalence</p> <p>2.1 Définition, premières propriétés</p> <p>2.2 Équivalents usuels</p> <p>2.3 Opérations, lien avec les limites</p> <p>2.4 Application aux courbes</p> |
|--|---|

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 19. Montrer que $(PQ)' = P'Q + PQ'$ pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
- Chapitre 19. Théorème 2 : formule de Taylor pour les polynômes.
- Chapitre 19. Théorème 4 : reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ et équivalence $P(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha) \mid P$.
- Chapitre 20. Exemple 16 : asymptote à la courbe de $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ en $+\infty$ et $-\infty$.

À venir : Comparaisons asymptotiques, espaces vectoriels.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer $\int_0^1 te^t dt$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à pôles simples.**

Exemple : décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \neq \pm 1$, $\frac{x^4+1}{x^3-x}$ pour $x \neq 0; \pm 1$.

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**

Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \frac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$, adjacence des suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

- **Matrices.**

Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.

Exemples : dérivée n -ième de $x \mapsto x^2 e^{-x}$, $|\text{Arctan } x - \text{Arctan } y| \leq |x - y|$ pour tous x, y , $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$.